ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ

ТРАНСФОРМАЦИЯ НА ЛАПЛАС В ПРИМЕРИ И ЗАДАЧИ

Йорданка Панева-Коновска

София
2012

Настоящето учебно пособие е подготвено със спонсорството и в рамките на работната програма по **Договор ДИД 02/25/ 2009** на тема „Интегрално-трансформационни методи, специални функции и приложения” с Фонд „Научни изследвания” при Министерството на образованието, младежта и науката на Р. България.

СЪДЪРЖАНИЕ

И така, аз обичам да водя диалог с великите умове на човечеството и обичам да развивам подобни вкусове и у студентите. Смятам, че е съвършено необходимо студентите да се възхищават от някого, а тъй като те обикновено не могат да се възхищават от преподавателите си, защото преподавателите ги изпитват или просто са несимпатични субекти, е нужно студентите да се възхищават от великите умове на човечеството, и затова преподавателите трябва да представят на студентите идеите на великите.

Раймон Арон

"Le Spectateur engagé"

(Julliard, 1981, p. 302)

АНОТАЦИЯ

Трансформация на Лаплас в примери и задачи

Й. Панева- Коновска

Учебното пособие е предназначено за студентите от магистърския курс на специалност ХПТ на ТУ, изучаващи дисциплината ИГВМ, която включва изложения учебен материал, но може да се използва и от други студенти, изучаващи този материал, както и от докторанти и научни работници.

Предлаганото учебно пособие е посветено на интегралната трансформация на Лаплас, която се използва широко в теорията и практиката: при изследването на различни инженерно-технически задачи, при решаване на диференциални, интегрални и интегро-диференциални уравнения и системи, възникнали в процеса на изследване. Състои се от 11 параграфа.

В него са изложени методи за решаване на основни типове примери и задачи. Всяка тема съдържа необходимия теоретичен материал, като на места са дадени кратки доказателства, подробно решени примери и задачи, както и достатъчен брой задачи за самостоятелна подготовка. В някои от решенията е използвана и ***Системата за компютърна алгебра* (СКА) – *”Maple” v. 13.*** Подробно изложените решения илюстрират изучавания материал, а използването на компютърните технологии помага на студентите за по-лесното му усвояване и осмисляне на математическите факти.

Първите няколко параграфа имат в известен смисъл подготвителен характер. В тях са включени дефинициии, и основни свойства на използваните в процеса на изложението функция на Хевисайд, Гама и Бета функции, функции на Бесел и Митаг-Лефлер и въведени техни обобщения, както и графики на някои от тях. Дадено е понятието цяла функция, ред и тип на цялата функция, които са използвани за доказване на полезни неравенства, произтичащи от свойствата на реда и типа.

В следващите няколко параграфа се дават дефинициите и основните свойства на понятията лапласов оригинал, трансформация на Лаплас и нейната обратна, подкрепени с множество примери и задачи. Като илюстрация е дадена таблица на някои често използвани образи и са намерени образите на функцията $f(t)=t^{\alpha}$ за $\alpha \in \mathbb{C}$ при $\operatorname{Re}\alpha > -1$, експоненциалната функция и функцията на Митаг-Лефлер.

Получените знания се използват по-нататък за намиране на лапласов образ по зададен оригинал, а така също и възстановяване на оригинала по зададен образ.

Последните три параграфа са посветени на разнообразни приложения на операционното смятане – намиране решенията на някои диференциални, интегрални и интегро-диференциални уравнения и системи от уравнения, използване на метода на Дюамел за задача на Коши с нулеви начални условия и дробен интеграл на Риман-Лиувил.

София, 2012

§1. Функция на Хевисайд

Функцията $\eta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, дефинирана с равенството

$$\eta(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\geq 0\end{cases} \tag{1.1}$$

е известна като функция на ***Хевисайд*** (по името на английския електоинженер и физик Оливър Хевисайд). Тази функция е прекъсната в нулата и има скок единица в тази точка и непрекъсната за всички останали стойности на аргумента t.

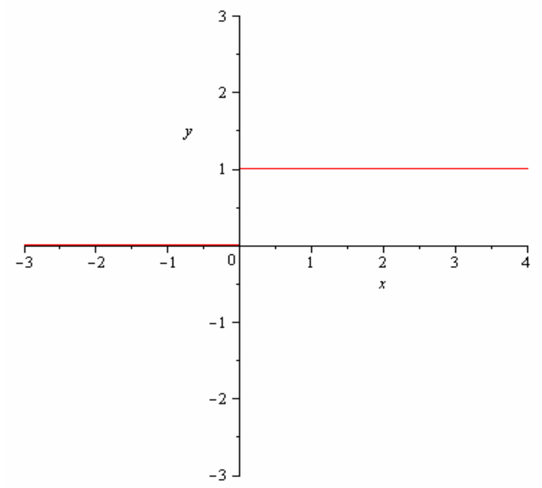
На фиг. 1.1 функцията на Хевисайд е изобразена с помощта на СКА Maple.

По-нататък може да се въведе означението

$$\tilde{\eta}(t):=\eta(t-t_0)=\begin{cases}0, & \text{за } t<t_0,\\ 1, & \text{за } t\geq t_0.\end{cases} \tag{1.2}$$

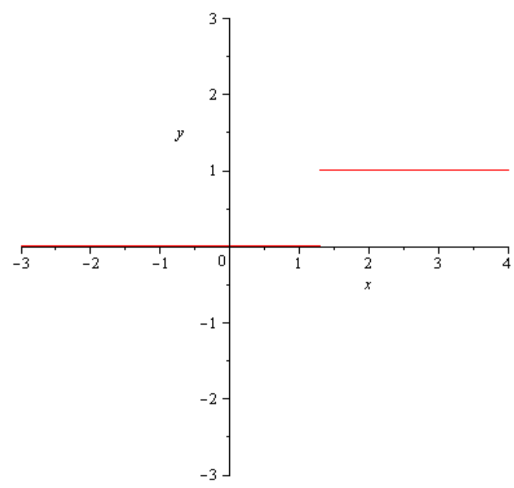
Това равенство дефинира функция $\tilde{\eta}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, която е известна като обобщена функция на Хевисайд. Нейни графики (за t_0=1,3 и t_0=2,7) са изобразени съответно на фиг. 1.2. и 1.3.

$>plot(\mathrm{Heaviside}(t), t=-3..4, y=-3..3, discont=true)$



Фиг.1.1.

$>plot(\mathrm{Heaviside}(t-1.3), t=-3..4, y=-3..3, discont=true)$



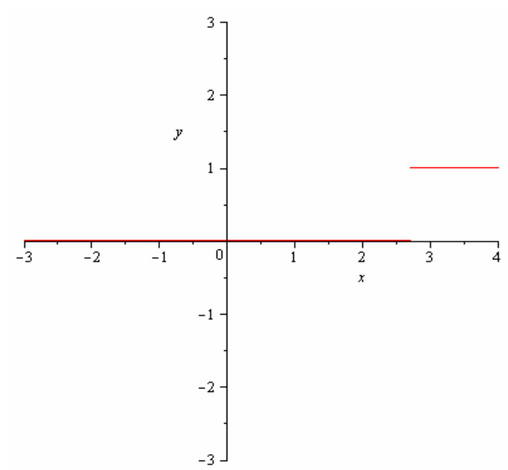
Фиг.1.2.

Нека сега $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$. Тогава функцията $\eta_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\eta_1(t) := \eta(t-a) - \eta(t-b) = \begin{cases} 0, & t \notin [a,b) \\ 1, & t \in [a,b) \end{cases} \quad . \tag{1.3}$$

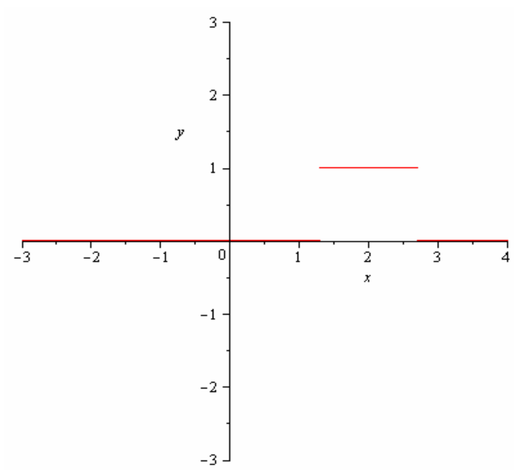
има стойност =1 за всяка точка от интервала $[a,b)$ и стойност = 0 извън него. За илюстрация на фиг. 1.4 е дадена графиката на $\eta_1(t)$ с помощта на СКА Maple 13 за стойности на a=1,3 и b=2,7.

> $plot(\mathrm{Heaviside}(t-2.7), t=-3..4, y=-3..3, discont=true)$



Фиг.1.3.

> $plot(\mathrm{Heaviside}(t-1.3)-\mathrm{Heaviside}(t-2.7), t=-3..4, y=-3..3, discont=true)$



Фиг.1.4.

Бележка 1.1. Да отбележим, че с помощта на функцията (1.1) може да се запише функция, тъждествено равна на нула за $t<0$, с (1.2) – функция, тъждествено равна на нула за $t<t_0$, а с (1.3) – функция, тъждествено равна на нула извън даден интервал $[a,b)$. Така например, ако $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е дадена функция, то

$f_1(t) = f(t)\eta(t) = f(t)$ за всички стойности на $t \geq 0$,

$f_2(t) = f(t)\eta(t-t_0) = f(t)$ за всички стойности на $t \geq t_0$

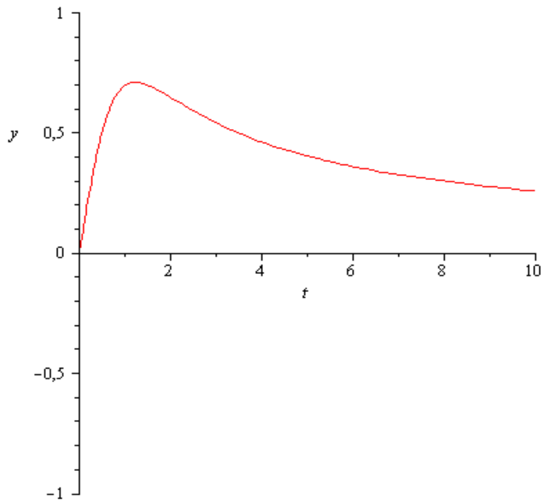
$f_3(t) = f(t-t_0)\eta(t-t_0) = f(t-t_0)$ за всички стойности на $t \geq t_0$;

$f_4(t) = [\eta(t-a) - \eta(t-b)] f(t-a) = f(t-a)$ за всички стойности на $t \in [a,b)$.

Извън посочените интервали новообразуваните функции $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ и $f_4(t)$ са тъждествено равни на нула.

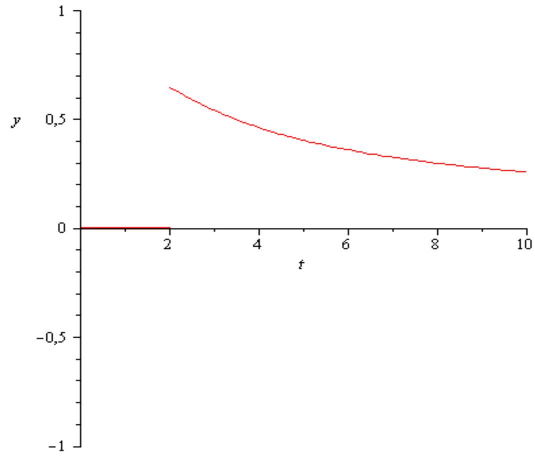
Тъй като за нашите цели се нуждаем от функции, тъждествено равни на нула наляво от нулата, функциите $f_1(t)$ – $f_4(t)$ са изобразени за стойности на $t \geq 0$ (съответно фиг. 1.5 – 1.8). Например на фиг 1.7 е изобразена функцията $f_3(t)$, която е $f_1(t)$ със закъснение на аргумента $=2$.

$plot((\mathrm{Heaviside}(t)) \cdot f(t), t = 0..10, y = -1..1, discont = true);$



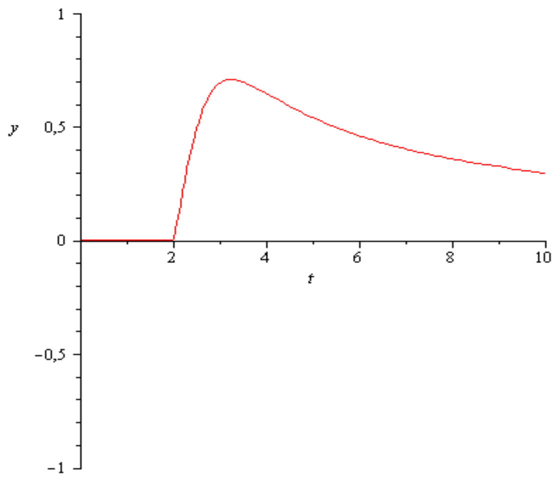
Фиг.1.5.

$plot((\mathrm{Heaviside}(t-2)) \cdot f(t), t = 0..10, y = -1..1, discont = true);$



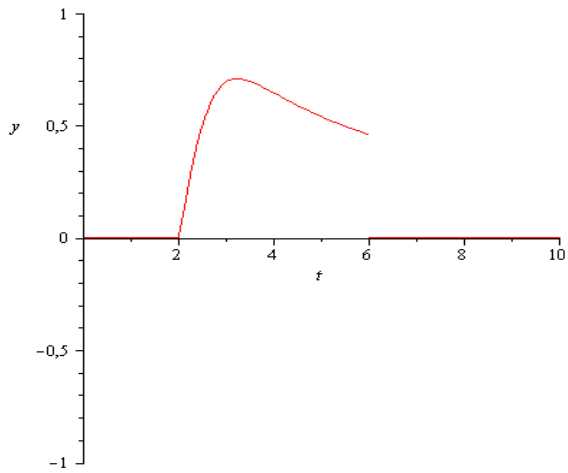
Фиг.1.6.

$plot((\mathrm{Heaviside}(t-2)) \cdot f(t-2), t = 0..10, y = -1..1, discont = true);$



Фиг.1.7.

$plot((\mathrm{Heaviside}(t-2) - \mathrm{Heaviside}(t-6)) \cdot f(t-2), t = 0..10, y = -1..1, discont = true);$



Фиг.1.8.

§2. Гама и Бета функции

Съществуват няколко еквивалентни дефиниции за ***Гама функцията*** **Г(*x*)**, повечето от които дължим на Ойлер. Съгласно дефиницията на Гаус (Ердей [5], том 1, стр 15),

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)...(x+n)}, \tag{2.1}$$

откъдето може да се покаже, че границата съществува при условие, че $x\neq 0,-1,-2,...$

Замествайки $x = 1$ в (2.1) намираме, че $\Gamma(1) = 1$:

$$\Gamma(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n}{1.2.3...(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1 \ .$$

В общия случай, стойностите на $\Gamma(x)$ не винаги могат така лесно да бъдат пресмятани. Но ако в (2. 1) заменим x с $x + 1$ получаваме, че

$$\Gamma(x+1)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{x+n+1}\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)...(x+n)}=x\Gamma(x),$$

откъдето последователно следват известните рекурентни зависимости ($n\in\mathbb{N}$):

$$\begin{aligned}
&\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),\\
&\Gamma(x)=(x-1)(x-2)...(x-n)\Gamma(x-n),\\
&\Gamma(1-x+n)=(n-x)...(2-x)(1-x)\Gamma(1-x),\\
&\Gamma(x)\Gamma(1-x)=(-1)^n\Gamma(x-n)\Gamma(1-x+n),\\
&\Gamma(x)\Gamma(1-x)=(-1)^n\Gamma(x+n)\Gamma(1-x-n).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

От първото от тъждествата (2. 2) непосредствено се вижда, че

$$\Gamma(2)=1.\Gamma(1)=1, \quad \Gamma(3)=2.\Gamma(2)=2.1=2! \quad \Gamma(4)=3.\Gamma(3)=3.2!=3!,$$

а с помощта на математическа индукция лесно се доказва, че

$$\Gamma(n+1)=n! \text{ за } n = 0,1,2,\ldots$$

По такъв начин се оказва, че Гама функцията $\Gamma(x)$ е разширение на функцията факториел (дефинирана само за цели положителни числа) в множеството на реалните числа, с изключение на 0,–1,–2, …

За стойности на $x>0$, Гама функцията $\Gamma(x)$ се изразява чрез интегралното представяне на Ойлер

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \quad x>0. \tag{2. 3}$$

Интегралът отдясно в (2. 3) е известен като интеграл на Ойлер от втори род. Той е несобствен интеграл не само поради безкрайната горна интеграционна граница, но и защото функцията t^{x-1} расте неограничено в близост до $t=0$, при условие, че $0<x<1$.

Известно е обаче, че интегралът (2. 3) е равномерно сходящ във всеки интервал $[a,b]$, където $0<a\le b<+\infty$, поради което $\Gamma(x)$ е непрекъсната функция за $x>0$. Равномерната сходимост на интеграла (2. 3) позволява също така да се пресметне и $\Gamma'(x)$ чрез диференциране под знака на интеграла.

Аналогично се установява и съществуването на производните от по-висок ред. И така, функцията $\Gamma(x)$ е непрекъсната при всички положителни стойности на променливата x (т.е. за $x\in(0,\infty)$) и притежава непрекъснати производни от произволен ред.

При това, при $x\in(0,\infty)$ производната $\Gamma'(x)$ е растяща, а $\Gamma''(x)$ е положителна.

Дефиницията (2. 1) дава възможност Гама функцията да бъде дефинирана и за $x<0$. За целта обаче е далеч по-удобно да се използва първата от рекурентните зависимости (2.2). Този подход води до формулата

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+k)}{x(x+1)(x+2)...(x+k-1)},\quad k=1,2,...,$$

чрез която се дефинира Гама функцията в интервала

$$x>-k \qquad (x\neq 0,-1,-2,...,-k+1),$$

посредством Гама функция с положителен аргумент.

Поведението на $\Gamma(x)$ при „големи” стойности на положителната независима променлива може да се опише просто: тя расте бързо, по-бързо от експоненциална функция. Асимптотично при $x\to\infty$ Гама функцията се дава с формулата на Стирлинг:

$$\Gamma(x+1)\sim\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x,\ \text{ т.е. }\ \Gamma(x)\sim\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\left(\frac{x}{e}\right)^x, \qquad (2.4)$$

където символът $\sim$ означава, че отношението на двете страни клони към 1. Полезна се оказва също и формулата, даваща отношението на две Гами функции, именно:

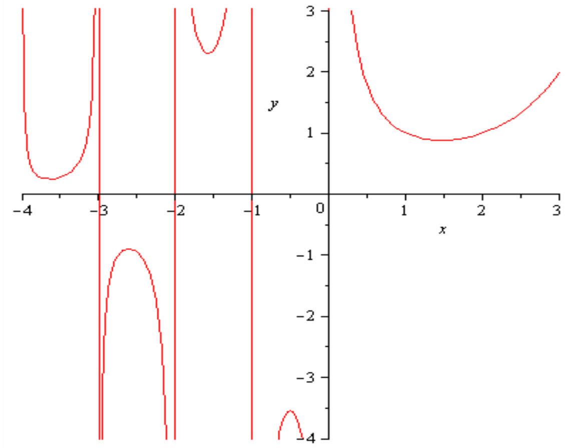
$$\frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x+\beta)}\sim x^{\alpha-\beta}. \qquad (2.5)$$

Бележка 2.1. Да отбележим само за пълнота, че Гама функцията се продължава и в комплексната равнина $\mathbb{C}$, и освен това, формулите (2.3), (2.4) и (2.5) остават в сила и в този случай (при известни ограничения за независимата променлива). По-специално, формулата (2.3) се записва във вида (Ердей, 1.1(5)):

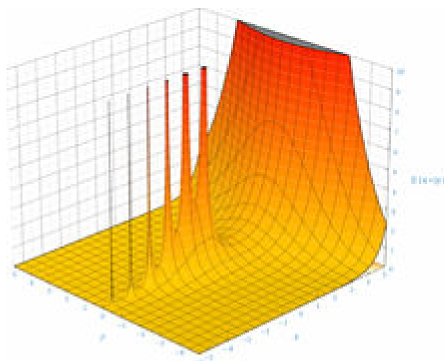
$$\Gamma(z)=p^z\int_0^\infty e^{-pt}t^{z-1}dt,\ \ \operatorname{Re}z>0. \qquad (2.\ 3^*)$$

По-долу е дадена графиката на функцията $\Gamma(x)$ за реални стойности на x, получена с помощта на СКА Maple 13, както и изображение на абсолютната стойност на Гама функцията в комплексната равнина.

$> \, plot(\mathrm{GAMMA}(x), x=-4..3, y=-4..3);$



Фиг. 2.1



Фиг. 2.2

Можем да си съставим обща представа за поведението на Гама функцията $\Gamma(x)$ при изменение на x в интервала $(0,\infty)$.

За да изучим поведението на функцията $\Gamma(x)$, когато $x \to 0_+$, използваме рекурентната зависимост (2. 2). Така виждаме, че

$$\lim_{x\to 0_+}\Gamma(x)=\lim_{x\to 0_+}\frac{\Gamma(x+1)}{x}=+\infty\ .$$

От друга страна, $\Gamma(x)>n!$, стига само $x>n+1$, откъдето следва, че и $\lim\limits_{x\to+\infty}\Gamma(x)=+\infty$.

Тъй като $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$, по теоремата на Рол следва, че $\Gamma'(x)$ се анулира в точка α_0 от интервала $(1,2)$. Тъй като $\Gamma'(x)$ е растяща в интервала $(0,\infty)$, то $\Gamma'(x)<0$ при $0<x<\alpha_0$ и функцията $\Gamma(x)$ намалява, а при стойности на $x>\alpha_0$ производната $\Gamma'(x)>0$, и следователно там $\Gamma(x)$ расте. Следователно, $\Gamma(x)$ има минимум в точката $x=\alpha_0$. Пресмятанията, които тук са извършени с помощта на СКА Maple 13, дават следния резултат :

➢ $minimize(\mathrm{GAMMA}(x), x = 1..2)$

$$\Gamma(RootOf(\Psi(\_Z), 1.461632145))$$

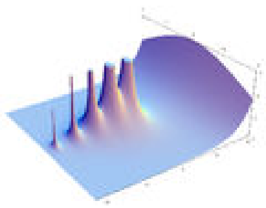
➢ $\Gamma(\alpha_0) := \mathrm{GAMMA}(1.461632145)$

$$0.885603194,$$

т.е.

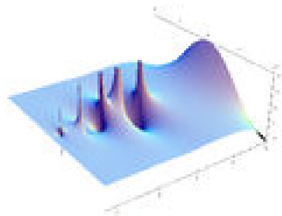
$$\alpha_0 = 1.461632145\ldots, \qquad \min\Gamma(x) = \Gamma(\alpha_0) = 0.8856031944\ldots$$

Изобразяването на Гама функцията в комплексната равнина дава:



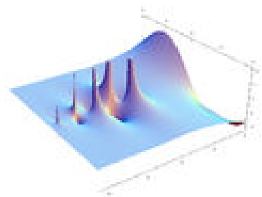
Абсолютна стойност

Фиг. 2.3



Реална част

Фиг. 2.4



Имагинерна част.

Фиг. 2.5

Бета функцията се дефинира чрез интеграла

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad \mathrm{Re}\, x > 0,\ \mathrm{Re}\, y > 0 \tag{2.6}$$

и е известна още като интеграл на Ойлер от първи род. Връзката между Бета и Гама функциите има вида

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad \mathrm{Re}\, x > 0,\ \mathrm{Re}\, y > 0. \tag{2.7}$$

В заключение на този параграф да отбележим, че изчерпателна информация за свойствата на Гама функцията и свързаните с нея специални функции се съдържа например в Ердей ([5], т. 1), Маркушевич ([15], том2), Подлубни ([19]), Фихтенголц ([23], том2).

§3. Функции на Митаг-Лефлер. Функции на Бесел. Обобщения

Специалните функции (СФ) са много стар клон на математиката и стремежът към пълна унифицирана теория продължава още от 19-ти век. Тяхната значимост като апарат на математическия анализ е добре известна на учените-приложници и инженерите, занимаващи се с практически приложения на диференциални и интегрални уравнения и системи. Разнообразието от задачи, водещи до употреба на СФ е стимулирало развитието на тяхната теория. Най-често СФ възникват като решения на някои основни ОДУ, както и при решаването на ЧДУ с метода на разделяне на променливите. Техните дефиниции и добре известни свойства могат да се намерят в добрите стари справочници по СФ от така наречената „*класическа ера*", като тези на Бейтман и Ердей (3 тома, 1953-55 г.); Абрамович и Стиган (1964), Слейтър (1966), Люк (1969), и т.н.

Нека да отбележим, че така наречените *Класически СФ* (*СФ на Математическата физика, Функции с имена*), като функциите на Бесел, МакДоналд, Ломел, Струве, и останалите цилиндрични функции; функциите на Гаус, Кумер, Трикоми; всичките класически ортогонални полиноми (на Лагер, Ермит, Якоби, Гегенбауер, Чебишов и др.); непълните Бета- и Гама-функции; функцията на грешките; функциите на Ейри, Уиттъкер и т.н. са свързани с диференциални уравнения от *целочислен* ред, за разлика от функции, които са решение на диференциални уравнения от *НЕцелочислен (дробен)* ред, и използваното за тях понятие: *Специални Функции на Дробното Смятане* (***СФ на ДС***). Най-елементарен пример за такава функция е функцията на Митаг-Лефлер, справедливо считана за „*Кралица*" на ДС. Тя е решение на диференциално уравнение от дробен ред, например на уравнението $D^{\alpha} y_{\alpha}(z) = \lambda y_{\alpha}(z)$ $(\alpha > 0)$, чието решение $y_\alpha(z)=z^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda z^\alpha)=z^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k z^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}$ се нарича α-експоненциална функция и е обобщение на експонентата $\exp(\lambda z)$, т.е. $y_1(z)=E_{1,1}(\lambda z)=\exp(\lambda z)$.

Функциите

$$E_\alpha(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)},\ \ \alpha>0; \tag{3.1}$$

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\ \ \alpha>0,\beta>0, \tag{3.2}$$

$$E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}z^k,\ \ \alpha>0,\beta>0 \tag{3.3}$$

(тук с $(\gamma)_k=\gamma(\gamma+1)...(\gamma+k-1)=\frac{\Gamma(\gamma+k)}{\Gamma(\gamma)}$, $(\gamma)_0=1$ е означен символът на Поххамер, Ердей [5]), известни съответно като еднопараметрична, двупараметрична и трипараметрична функция на Митаг-Лефлер, също представляват обобщение на експоненциалната функция $\exp(z)=e^z$. Първите две са въведени съответно от Митаг-Лефлер и Агарвал и подробно изследвани от Джрбашян, а третата от Прабхакар ([20]). От (3.2) следва непосредствено, че

$$E_{1,1}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+1)}=e^z, \tag{3.4}$$

$$E_{1,2}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+2)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+1)!}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}=\frac{e^z-1}{z},$$

$$E_{1,3}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+3)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+2)!}=\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+2}}{(k+2)!}=\frac{e^z-1-z}{z^2}.$$

Изобщо, за m естествено число е налице представянето:

$$E_{1,m}(z)=\frac{1}{z^{m-1}}\left[e^z-\sum_{k=0}^{m-2}\frac{z^k}{k!}\right].$$

Оказва се, че хиперболичните синус и косинус функции са частни случаи на двупараметричната функция на Митаг-Лефлер (3.1). Наистина,

$$E_{2,1}(z^2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}=\operatorname{ch} z\,,$$

$$E_{2,2}(z^2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}=\frac{\operatorname{sh} z}{z}.$$

При $\beta=1$ функцията (3.2) се свежда до еднопараметричната функция на Митаг-Лефлер, т.е.

$$E_{\alpha,1}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}=E_\alpha(z).$$

Да отбележим, че редът (3.2) е сходящ в цялата комплексна равнина.

Наистина, нека c_k е коефициента пред z^k, т. е

$$c_k=\frac{1}{\Gamma(\alpha k+\beta)}. \tag{3.5}$$

Тогава по формулата на Стирлинг

$$c_k\sim\sqrt{\frac{\alpha k+\beta}{2\pi}}\;\frac{e^{\alpha k+\beta}}{(\alpha k+\beta)^{\alpha k+\beta}}\,,$$

и следователно

$$\Lambda=\limsup_{k\to\infty}|c_k|^{1/k}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\alpha k+\beta}{2\pi}\right)^{1/2k}\;\frac{e^{\alpha+\beta/k}}{(\alpha k+\beta)^{\alpha+\beta/k}}=0,$$

откъдето следва, че радиусът на сходимост на реда (3.2) (а също така и на редовете (3.1) и (3.4), като частни случаи) е $R=1/\Lambda=\infty$. Т.е., редът (3.2) е сходящ в цялата комплексна равнина и следователно, представя цяла функция. В частност, редовете (3.1) и (3.4) също са сходящи в цялата комплексна равнина.

- **Функции на Бесел**

Решаването на редица задачи от механиката и математическата физика е тясно свързано с диференциалното уравнение на Бесел:

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz} + \left(z^2 - \nu^2\right)w = 0 .$$

Решение на това уравнение в областта $\mathbb{C} \setminus \left(-\infty, 0\right]$ е функцията ([2], 3.1 (8))

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m+\nu}}{m!\, \Gamma(m+\nu+1)} \quad , z \in \mathbb{C} \setminus \left(-\infty, 0\right]. \tag{3.6}$$

То се нарича ***функция на Бесел от първи род с индекс*** ν.

Поради голямата приложимост на тази функция са правени многобройни нейни обобщения, като напр. *функцията на Бесел-Майтленд* (по името на Сър Едуард Майтленд Райт):

$$J_\nu^\mu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k!\Gamma(\mu k + \nu + 1)},\ z \in \mathbb{C};\ \ \mu > -1, \tag{3.7}$$

обобщената функция на Бесел-Райт:

$$J_{\nu,\lambda}^\mu(z) = (z/2)^{\nu+2\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{\Gamma(\lambda+k+1)\Gamma(\mu k+\lambda+\nu+1)},\ \mu > 0,\ z \in \mathbb{C} \setminus \left(-\infty, 0\right],$$

функцията на Ломел-Райт:

$$J_{\nu,\lambda}^{\mu,m}(z) = (z/2)^{\nu+2\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{[\Gamma(\lambda+k+1)]^m \Gamma(\mu k+\lambda+\nu+1)}$$

$$\left(m \in \mathbb{N},\ \mu > 0,\ \lambda, \nu \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{C} \setminus \left(-\infty, 0\right]\right),$$

и др. подобни.

- **Нови обобщения**

Напоследък е въведен нов клас специални функции от типа на функциите на Митаг-Лефлер, които са *мултииндексен* аналог на функциите (3.2). Те са въведени и подробно изучавани от Кирякова (виж напр. [7]-[10]). Тук индексите $\alpha = 1/\rho$, $\beta = \mu$ са заместени с две множества от мултииндекси $\alpha \to (1/\rho_1, 1/\rho_2, ..., 1/\rho_m)$, $\beta \to (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m)$:

$$E_{(1/\rho_i),(\mu_i)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\prod_{i=1}^{m} \Gamma(\mu_i + k/\rho_i)}, \quad \rho_i > 0, \mu_i > 0, \; i = 1,2,...,m. \quad (3.8)$$

Оказва се, че *мултииндексните функции* (3.8) са цели функции и са обобщение не само на на функциите (3.2), а и на беселовите функции и разгледаните по-горе техни обобщения на Райт. Тези функции са разглеждани също така от Лучко [12] и Якубович и Лучко [24] и са наречени от тях функции на Митаг-Лефлер с векторен индекс.

Наскоро беше въведен и друг клас от специални функции (виж [16], [17]), а именно, $3m$*-параметричните мултииндексни функции*, които са обобщение както на функциите (3.2) и (3.8), така и на (3.3):

$$E^{(\gamma_i),m}_{(\alpha_i),(\beta_i)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{m} (\gamma_i)_k}{\prod_{i=1}^{m} \Gamma(\alpha_i k + \beta_i)} \cdot \frac{z^k}{(k!)^m}, \quad \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}, \; \mathrm{Re}\,\alpha_i > 0. \quad (3.9)$$

Изучени са основни свойства на тези цели функции, като например диференциране и интегриране (включително от дробен ред), направени са различни интегрални представяния, определено е мястото им сред другите известни специални функции. Изследвана е и сходимост на редове от функции от тези класове ([17], [18]).

- **Ред ρ и тип σ на цяла функция**

Дефиниция 3.1. [11] Ако F е цяла функция, и

$$M(r) = M(F;r) = \max_{|z|=r} |F(z)|,$$

то числото

$$\rho = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r}$$

се нарича ***ред на*** F (случаят $\rho=\infty$ не се изключва). Ако $\rho<\infty$, F се нарича от *краен ред*; ако $\rho=\infty$, за F се казва, че е от *безкраен ред*; ако $\rho=0$, F се нарича от *нулев ред*.

При $0\le\rho<\infty$ за реда ρ на функцията F са в сила неравенствата ($\varepsilon>0$):

$$M(r)<\exp\left(r^{\rho+\varepsilon}\right),\ r>r_0(\varepsilon); \qquad M(r_n)>\exp\left(r_n^{\rho-\varepsilon}\right),\ \lim r_n=\infty.$$

Примери:

1) Константата има ред нула (по подразбиране);

2) $\exp z$: $\rho=1$.

Наистина, в този случай $M(r)=\max\limits_{|z|=r}|\exp(z)|=\exp r$, откъдето следва, че $\ln\ln M(r)=\ln\ln(\exp r)=\ln r$ и следователно $\rho=1$.

3) $\sin z, \cos z$: $\rho=1$

4) $\cos\sqrt{z}$: $\rho=1/2$

5) $\exp P(z)$, P – полином от степен k: $\rho=k$.

Ако ρ е крайно, което ние ще предполагаме винаги, и различно от нула, може да се дефинира още едно число – тип на цялата функция F (виж отново [11]).

Дефиниция 3.2. Ако F е цяла функция от ред $\rho>0$, то

$$\sigma=\limsup_{r\to\infty}\frac{\ln M(r)}{r^{\rho}}$$

се нарича ***тип на*** F (случаят $\sigma=\infty$ не се изключва). Ако $\sigma=\infty$, за F се казва, че е от *максимален тип*; ако $\sigma=0$, F се нарича от *минимален тип*; ако $0<\sigma<\infty$, за F се казва, че е *от нормален тип*.

Типът σ ($0\le\sigma\le\infty$) се характеризира със свойствата:

$$M(r)<\exp\left((\sigma+\varepsilon)r^{\rho}\right),\ r>r_0(\varepsilon), \tag{3.10}$$

$$M(r_n)>\exp\left((\sigma-\varepsilon)r_n^{\rho}\right),\ \lim r_n=\infty.$$

Последните две формули се използват успешно за намиране на асимптотични формули за цели функции за „големи” стойности на аргумента.

Ако дадена цяла функция е представена със степенен ред $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$,

то нейният ред ρ и тип σ, се дават съответно с формулите [11]:

$$\rho = \limsup_{k\to\infty} \frac{k\ln k}{\ln\left(1/|c_k|\right)}, \quad \left(\sigma e\rho\right)^{1/\rho} = \limsup_{k\to\infty}\left(k^{1/\rho}|c_k|^{1/k}\right). \tag{3.11}$$

Нашата цел по-нататък е да определим реда и типа на функцията (3.2). И така, намираме последователно:

$$\ln\left(1/|c_k|\right) = \ln\Gamma(\alpha k+\beta) \sim \ln\sqrt{2\pi} - \ln\sqrt{\alpha k+\beta} - \left(\alpha k+\beta\right) +$$
$$+\left(\alpha k+\beta\right)\left[\ln k + \ln\left(\alpha+\beta/k\right)\right] = \alpha\left(k\ln k\right) + o(k\ln k)$$

$$\rho = \limsup_{k\to\infty} \frac{k\ln k}{\alpha\left(k\ln k\right)+o(k\ln k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{k\ln k}{\alpha\left(k\ln k\right)+o(k\ln k)} = \frac{1}{\alpha}; \tag{3.12}$$

$$k^{1/\rho}|c_k|^{1/k} = \frac{k^{\alpha}}{[\Gamma(\alpha k+\beta)]^{1/k}} \sim k^{\alpha}\left(\frac{\alpha k+\beta}{2\pi}\right)^{1/2k} \frac{e^{\alpha+\beta/k}}{(\alpha k+\beta)^{\alpha+\beta/k}}$$

$$\limsup_{k\to\infty}\left(k^{1/\rho}|c_k|^{1/k}\right) = \limsup_{k\to\infty}\left(\frac{\alpha k+\beta}{2\pi}\right)^{1/2k} \frac{k^{\alpha}e^{\alpha+\beta/k}}{(\alpha k+\beta)^{\alpha+\beta/k}} = \frac{e^{\alpha}}{\alpha^{\alpha}}$$

$$\left(\sigma e\rho\right)^{1/\rho} = \left(\frac{\sigma e}{\alpha}\right)^{\alpha} = \frac{(\sigma e)^{\alpha}}{\alpha^{\alpha}} = \frac{\sigma^{\alpha}e^{\alpha}}{\alpha^{\alpha}}.$$

От последните две равенства, след като отчетем второто от равенствата (3.11), получаваме окончателно, че функцията на Митаг-Лефлер е цяла функция с ред ρ и тип σ, дадени с равенствата

$$\rho = \frac{1}{\alpha}, \; \sigma = 1. \tag{3.13}$$

Последното (съгласно свойството (3.10) на типа σ) показва, че функцията (3.2) удовлетворява следното неравенство:

$$\left|E_{\alpha,\beta}(z)\right| < \exp\left((\sigma+\varepsilon)\,|\,z\,|^{\rho}\right), \text{ за } |\,z\,| \geq r_0 > 0,$$

за ρ и σ, дадени с (3.13) и $|\,z\,| \geq r_0(\varepsilon)$, $r_0(\varepsilon)$ достатъчно „голямо”, т.е

$$\left|E_{\alpha,\beta}(z)\right| < \exp\left((1+\varepsilon)\,|\,z\,|^{1/\alpha}\right), \text{ за } |\,z\,| \geq r_0 > 0. \tag{3.14}$$

За по-нататъшното изложение е достатъчно да се ограничим до случая на функцията на *Бесел-Майтленд*, за положителни стойности на параметъра μ. В този случай J_ν^μ е цяла функция. Като използваме, че

$$\ln\left(1/|\,c_k\,|\right) = \ln\Gamma(k+1) + \ln\Gamma(\mu k+\nu+1) \sim k\ln k + \mu\left(k\ln k\right) + o(k\ln k),$$

аналогично на доказателството за (3.13) и (3.14), получаваме че функцията J_ν^μ е цяла функция с ред ρ и тип σ както следва:

$$\rho = \frac{1}{\mu+1}, \; \sigma = \frac{\mu+1}{\mu^{\mu/(\mu+1)}} \qquad (\mu > 0). \tag{3.15}$$

Последното показва, че функцията (3.7) удовлетворява неравенството

$$\left|J_\nu^\mu(z)\right| < \exp\left((\sigma+\varepsilon)\,|\,z\,|^{\rho}\right), \; \mu > 0, \; |\,z\,| \geq r_0 > 0, \tag{3.16}$$

за ρ и σ, дадени с (3.15) и $|\,z\,| \geq r_0(\varepsilon)$, $r_0(\varepsilon)$ – достатъчно „голямо”.

Бележка. 3.1. Функциите

$$(z/2)^{-\nu} J_\nu(z), \; (z/2)^{-(\nu+2\lambda)} J_{\nu,\lambda}^{\mu}(z) \quad \text{и} \quad (z/2)^{-(\nu+2\lambda)} J_{\nu,\lambda}^{\mu,m}(z),$$

свързани с останалите разгледани функции, са също цели функции. Определянето на техния ред ρ и тип σ оставяме на любопитния читател.

Бележка. 3.2. Функциите (3.8) имат ред ρ и тип σ, дадени с формулите ([7]):

$$1/\rho = 1/\rho_1 + ... + 1/\rho_m, \qquad \sigma = (\rho_1/\rho)^{\rho/\rho_1} ... (\rho_m/\rho)^{\rho/\rho_m} \; . \quad (3.17)$$

а функциите (3.9) – с формулите ([16]):

$$1/\rho = \mathrm{Re}\alpha_1 + ... + \mathrm{Re}\alpha_m, \quad 1/\sigma = \left|(\rho\alpha_1)^{\rho\alpha_1}\right| ... \left|(\rho\alpha_m)^{\rho\alpha_m}\right|. \quad (3.18)$$

Очевидно е, че (3.17) може да се получи като частен случай на (3.18).

§4. Функция оригинал. Дефиниция, примери, свойства

Дефиниция 4.1. Функцията $f:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, за която $f(t) = u(t) + iv(t)$ ($u(t), v(t) \in \mathbb{R}$ за всяка реална стойност на t), и която удовлетворява следните условия:

1) f е еднозначна, непрекъсната (поне по части) заедно с производните си до n-ти ред $(n = 0,1,2,...)$ за всички стойности на $t \in (-\infty, \infty)$.

2) $f(t) = 0$ за $t < 0$,

3) съществуват числа $M > 0$ и $\sigma \geq 0$, такива че

$$|f(t)| \leq Me^{\sigma t} \text{ за всяко } t \geq 0 \quad (4.1)$$

се нарича ***функция оригинал*.**

Бележка 4.1. Условието 1) означава, че всеки краен интервал може да се раздели на краен брой подинтервали, във всеки един от които f и $f^{(n)}$ са непрекъснати и имат крайни леви и десни граници в краищата им. Голяма част от функциите, които се срещат в практиката удовлетворяват това условие.

Условието 3) означава, че функцията $f(t)$ или е ограничена ($\sigma = 0$) или расте не по-бързо от експоненциална функция $e^{\sigma t}$, когато променливата t расте неограничено. За такива функции се казва, че са функции от порядъка на експоненциалната функция.

Условието 3) често се замества със следното условие:

3*) съществуват числа $M > 0,\ T > 0$ и $\sigma \geq 0$, такива че

$$|f(t)| \leq Me^{\sigma t} \text{ за всяко } t > T, \qquad (4.1^*)$$

което е тривиално изпълнено в случай, че функцията f удовлетворява условието 1) и 3).

Дефиниция 4.2. Числото $\sigma_0 \geq 0$ се нарича ***показател на ръста*** на функцията $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, ако неравенството (4.1) е изпълнено за $\sigma = \sigma_0 + \varepsilon$ и не е изпълнено за $\sigma = \sigma_0 - \varepsilon$ (т.е. σ_0 е точна долна граница на числата $\sigma = \sigma_0 + \varepsilon$) за всяко число $\varepsilon > 0$.

Примери. Да се провери дали следните функции са оригинали.

а) Единичната функция на Хевисайд $\eta(t)$.

Очевидно, условията 1) - 3) са изпълнени (с $M = 1$ и $\sigma_0 = 0$).

б) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{2t}\cos^2(3t), & t \geq 0 \end{cases}$

И тук, очевидно условията 1) и 2) са изпълнени. Остава да се провери само условието 3). Имаме $|f(t)| = \left|e^{2t}\cos^2(3t)\right| = e^{2t}\left|\cos^2(3t)\right| \leq e^{2t}$, откъдето $M = 1$ и $\sigma_0 = 2$.

Бележка 4.2. Използвайки функцията на Хевисайд $\eta(t)$, горната функция може да се запише по-кратко във вида $f(t) = e^{2t}\cos^2(3t)\eta(t)$. Обаче ние често ще пропускаме множителя $\eta(t)$, помнейки че $f(t) = 0$ при $t < 0$. В случая, например, ще пишем просто, че $f(t) = e^{2t}\cos^2(3t)$.

в) $f(t) = t^{-1/2}$

Тъй като дадената функция е неограничена в околност на нулата, тя не изпълнява условието 1), и следователно не е оригинал.

г) $f(t) = e^{-t^2}$

Условията 1) и 2) са очевидно изпълнени. За условието 3) имаме

$f(t) = e^{-t^2} \leq 1 = 1.e^{0.t}$, откъдето $M = 1$ и $\sigma_0 = 0$.

д) $f(t) = e^{t^2}$

Условията 1) и 2) са очевидно изпълнени. Проверката на условието 3) може да се извърши с допускане на противното, т.е. допускането, че $f(t) = e^{t^2}$ е оригинал. Това води до съществуването на константи M и σ_0, за които $f(t) = e^{t^2} \leq M.e^{\sigma_0.t}$ (т.е $e^{t^2 - \sigma_0.t} \leq M$), за всички $t \geq 0$, което очевидно е нарушено за „големи” стойности на t, и следователно $f(t) = e^{t^2}$ не е оригинал.

е) $\varphi_n(t) = t^n f(t)$ $(n = 1, 2, ...)$, ако $f(t)$ е функция оригинал с показател на ръста $\sigma_0 \geq 0$.

Нека $\varepsilon > 0$. Тъй като $f(t)$ е функция оригинал с показател на ръста $\sigma_0 \geq 0$, то $|f(t)| \leq M_1 e^{\sigma_0 t}$, и следователно

$$|\varphi_n(t)| = |t^n f(t)| \leq M_1 t^n e^{\sigma_0 t} = M_1 e^{(\sigma_0 + \varepsilon)t} t^n e^{-\varepsilon t}.$$

Да означим за краткост $g(t) = t^n e^{-\varepsilon t}$. Имаме, че производната на $g(t)$ $g'(t) = t^{n-1} e^{-\varepsilon t}(n - \varepsilon t)$ е положителна за стойности на t в интервала $(0, n/\varepsilon)$ и отрицателна за $t \in (n/\varepsilon, \infty)$, което означава, че $g(t)$ има абсолютен максимум за $t = n/\varepsilon$ и този максимум е $M_2 = \dfrac{n^n}{\varepsilon^n e^n}$, поради което $|\varphi_n(t)| = |t^n f(t)| \leq M_1 M_2 e^{(\sigma_0 + \varepsilon)t}$. Понеже $\varepsilon > 0$ е произволно число, а σ_0 е точната долна граница на числата $\sigma_0 + \varepsilon$, то $\varphi_n(t)$ е оригинал с показател на ръста σ_0.

ж) $E_{\alpha,\beta}(t^{\alpha});\ \alpha>0, \beta>0$

Както установихме в предния параграф, функцията $E_{\alpha,\beta}(z)$ $(z\in\mathbb{C})$ е цяла функция с ред $\rho=\dfrac{1}{\alpha}$ и тип $\sigma=1$ (виж формула (3.9)), и следователно изпълнява условието (3.14). Като отчетем, че в разглеждания пример z е заместено с t^{α}, получаваме, че дадената функция удовлетворява свойството 3*) с $M=1$ и $\sigma=1+\varepsilon$. Освен това, тя е диференцируема, откъдето и непрекъсната в цялата комплексна равнина. Това пък означава, че дадената функция изпълнява свойствата 1), 2) и 3*) и следователно е оригинал.

Свойства на оригиналите.

4.1. Ако $f(t)$ е оригинал с показател на ръста σ_0, то и нейният модул $|f(t)|$ е оригинал със същия показател на ръста.

4.2. Ако $f_k(t)$ ($k=1,2,...,n$) са оригинали с показатели на ръста $\sigma_0^{(k)}$, то и функцията $f(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}C_k f_k(t)$ (C_k - реални или комплексни константи) е оригинал с показател на ръста $\sigma_0=\max\limits_{k=1\div n}\sigma_0^{(k)}$.

4.3. Ако $f(t)$ е оригинал с показател на ръста σ_0, то и $\varphi(t)=f(\alpha t)$ е оригинал с показател на ръста $\sigma_0 \operatorname{Re}\alpha$, ако $\sigma_0 \operatorname{Re}\alpha>0$ и нула, ако $\sigma_0 \operatorname{Re}\alpha<0$.

4.4. Ако $f(t)$ е оригинал с показател на ръста σ_0, то и $\varphi(t)=e^{\alpha t}f(t)$ (α - реална или комплексна константа) е оригинал с показател на ръста $\sigma_0+\operatorname{Re}\alpha$, ако $\sigma_0+\operatorname{Re}\alpha>0$ и нула, ако $\sigma_0+\operatorname{Re}\alpha<0$.

4.5. Ако $f(t)$ е оригинал с показател на ръста σ_0, и $t_0 > 0$, то и функциите

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & ако\ t < t_0, \\ f(t - t_0), & ако\ t \geq t_0 > 0, \end{cases}$$

съответно

$$\psi(t) = \begin{cases} 0, & ако\ t < 0, \\ f(t + t_0), & ако\ t \geq 0, \end{cases}$$

са функции оригинали със същия показател на ръста**.**

Бележка 4.3. Използвайки функцията на Хевисайд $\eta(t)$ и нейното обобщение

$$\eta(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t \geq t_0 \end{cases},$$

горните функции могат да се запишат по-кратко във вида

$$\varphi(t) = f(t - t_0)\eta(t - t_0) = f(t - t_0)\eta(t),\ \psi(t) = f(t + t_0)\eta(t). \quad (4.2)$$

Дефиниция 4.3. Казва се, че $\varphi(t)$, дадена с (4.2) (или по-кратко функцията $f(t - t_0)$) е ***с аргумент*, *закъсняващ с*** $t_0 > 0$. Тя е изобразена графично на фиг 1.7 и графиката ѝ се получава от тази на $f(t)$ с транслиране надясно по оста t на t_0 единици. За функцията $\psi(t)$ се казва, че е с аргумент, ***изпреварващ с*** $t_0 > 0$. Нейната графика се получава от тази на $f(t)$ с транслиране наляво по оста t на t_0 единици, след което получените наляво от ординатата стойности се заменят с нулеви.

4.6. Ако $f(t)$ е оригинал с показател на ръста σ_0, то и $\varphi(t) = t^\alpha f(t)$ (α - реална или комплексна константа, $\mathrm{Re}\alpha > 0$) е оригинал със същия показател на ръста**.**

4.7. Ако $f(t)$ е оригинал с показател на ръста σ_0, то и $\varphi(t)=\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$ е непрекъснат оригинал в интервала $0 \le t < \infty$ с показател на ръста σ_0.

4.8. Ако $f'(t)$ е оригинал с показател на ръста σ_0, то и $f(t)$ е непрекъснат оригинал със същия показател на ръста (при това съществува крайна дясна граница $f(+0)$). Нещо повече, ако $f(t)$ е n пъти непрекъснато диференцируема в интервала $(0,\infty)$ и ако $f^{(n)}(t)$ е оригинал, то и $f(t)$, $f'(t)$, ... , $f^{(n-1)}(t)$ ($n=1, 2, ...$) са непрекъснати оригинали (и при това съществуват крайни десни граници $f(+0)$, $f'(+0)$, ... , $f^{(n-1)}(+0)$).

4.9. Ако $f_1(t)$ и $f_2(t)$ са оригинали с показатели на ръста съответно $\sigma_0^{(1)}$ и $\sigma_0^{(2)}$, то и произведението им $\varphi(t)=f_1(t)f_2(t)$ също е оригинал, с показател на ръста $\sigma_0=\sigma_0^{(1)}+\sigma_0^{(2)}$.

Доказателствата на изброените свойства могат да се видят например в [3], [4] и [14].

§5. Трансформация на Лаплас

С оглед на по-нататъшните разглеждания, ще приведем дефинициите и изложим някои от свойствата на интегралната трансформация на Лаплас. Ще отбележим, че подробна информация, свързана с тази трансформации, се съдържа например в книгите [3], [4], [14], [19], [21].

Дефиниция 5.1. Функцията $F(p)$ на комплексната променлива p, дефинирана чрез интеграла

$$F(p) = L(f;p) = L[f(t)](p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt \qquad (5.1)$$

се нарича ***трансформация на Лаплас на функцията-оригинал*** $f(t)$.

Когато функцията-оригинал е с експоненциален ръст α, което означава, че съществуват константи $M > 0$ и $T > 0$, такива, че

$$|f(t)| \le Me^{\alpha t}, \; t > T,$$

то интегралът (5.1) съществува. С други думи, функцията $f(t)$ не трябва да расте по-бързо от експоненциална функция, когато променливата t расте неограничено. Ако $f(t)$ е с експоненциален ръст α, трансформацията на Лаплас (5.1) съществува за всички p, за които $\operatorname{Re} p > \alpha$. Ако интегралът (5.1) е сходящ за $p_0 \in \mathbb{C}$, следва, че той е абсолютно сходящ за всички $p \in \mathbb{C}$, за които $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0$.

Дефиниция 5.2. Точната долна граница σ_f от стойностите на $\operatorname{Re} p$, от онези p, за които интегралът (5.1) е сходящ, се нарича ***абсциса на сходимост***, т.е. (5.1) е сходящ за такива p, за които $\operatorname{Re} p > \sigma_f$ и е разходящ за $\operatorname{Re} p < \sigma_f$.

Бележка 5.1. Всъщност, ако функцията $f(t)$ е оригинал с показател на ръста σ_0 (Дефиниция 4.2), то абсцисата на сходимост на интеграла (5.1) е $\sigma_f = \sigma_0$, т.е. показателят на ръста на оригинала $f(t)$ се нарича още абсциса на сходимост на интеграла (5.1).

В сила са следните теореми, които посочват условия за съществуване на образ.

Теорема 5.1. (*За съществуване на образа*). *Ако функцията* $f(t)$ *е оригинал с показател на ръста* σ_0, *то образът ѝ (5.1) е абсолютно* *сходящ в полуравнината* $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0$ *и е холоморфна функция в тази полуравнина.*

Теорема 5.2. (*Необходимо условие*). *Ако функцията* $F(p)$ *е образ на функцията* $f(t)$ *с показател на ръста* σ_0, то $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$.

Бележка 5.2. Да отбележим, че интегралът (5.1) може да съществува даже и ако функцията $f(t)$ не е оригинал. Такава е например функцията $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ (и изобщо функцията $f(t) = t^{-\alpha}$ за $0 < \alpha < 1$). В приложенията на операционното смятане се срещат функции, за които $\lim\limits_{t\to a} |f(t)| = \infty$ ($a \geq 0$). Тези функции очевидно не са оригинали, обаче за някои от тях интегралът на Лаплас съществува. Обикновено такива функции се наричат „*особени*" *оригинали* или *псевдооригинали,* а съответните им образи - „*особени*" *образи* или *псевдообрази*.

Функцията-оригинал $f(t)$ може да бъде възстановена чрез обратната трансформация на Лаплас

$$f(t) = L^{-1}[F(p);t] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt}F(p)dp, \ \ \sigma = \operatorname{Re} p > \sigma_f \,. \qquad (5.2)$$

Формулата (5.2) се нарича *формула за обръщане на Риман-Мелин,* а интегралът (5.2) се нарича още *интеграл на Бромуич*.

По-конкретно, в сила са следните теореми:

Теорема 5.3. (З*а обръщане на Риман-Мелин*) *Ако функцията-оригинал* $f(t)$ *с показател на ръста* $\sigma_0 \geq 0$ *удовлетворява условията на Дирихле* ([*22*], *стр. 417*) *във всеки краен интервал* (*т.е.* $f(t)$ *е по части непрекъсната и по части монотонна*), а *интегралът* $F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$ *е* *абсолютно сходящ по правата* $\operatorname{Re} p = \sigma$, *то оригиналът* $f(t)$ *се представя с формулата (5.2), като интегралът в (52) се разбира в смисъл на главна стойност, т.е.* $\int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} = \lim\limits_{A \to \infty} \int\limits_{\sigma - iA}^{\sigma + iA}$.

Теорема 5.4. (*Единственост на оригинала*) *Ако* $F(p)$ *е образ на два оригинала* $f_1(t)$ *и* $f_2(t)$, *то тези оригинали съвпадат (т.е.* $f_1(t) = f_2(t)$ *) навсякъде, където са непрекъснати.*

Теорема 5.5. (*Достатъчно условие за съществуване на образа*) *Ако функцията* $F(p)$ *е холоморфна (аналитична) в областта* $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, *и* $\lim\limits_{\operatorname{Im} p = s \to \infty} F(p) = 0$, *а* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(\sigma + is)| ds$ *е сходящ, то функцията* $F(p)$ *е образ и нейният оригинал* $f(t)$ *се получава от равенството*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{pt} F(p) dp,$$

където $\sigma = \operatorname{Re} p > \sigma_0$.

Да предположим, че $f(t)$ и $g(t)$ са функции-оригинали, които са тъждествено равни на нула за $t < 0$.

Дефиниция 5.3. Функцията φ, дефинирана с равенството

$$\varphi(t) = (f * g)(t) = \int\limits_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau, \tag{5.3}$$

се нарича ***конволюция на функциите*** $f(t)$ ***и*** $g(t)$.

Конволюцията (5.3) удовлетворява следните основни свойства:

5.1. *Комутативност:* $f * g = g * f$.

5.2. *Асоциативност:* $(f * g) * h = f * (g * h)$.

5.3. *Дистрибутивност относно действието събиране:*

$f * (g + h) = f * g + f * h$.

5.4. *Абсолютната стойност на конволюцията* $|f*g|\le|f|*|g|$.

5.5. *Непрекъснатост на конволюцията:* Ако $f(t)$ и $g(t)$ са непрекъснати в интервала $t\ge 0$, то и конволюцията им $f*g$ е непрекъсната в този интервал.

5.6. *Теорема на Титчмарш.* Ако $f(t)$ и $g(t)$ са непрекъснати за $t\ge 0$, и тяхната конволюция $f*g=0$ в този интервал, то поне една от тези функции е тъждествено равна на нула за $0\le t<\infty$.

5.7. Ако $f(t)$ и $g(t)$ са оригинали с показатели на ръста съответно σ_0 и σ_1, като например $\sigma_0>\sigma_1$, то и тяхната конволюция е оригинал с показател на ръста σ_0.

Нека трансформациите на Лаплас на функции-оригинали $f(t)$ и $g(t)$ са съответно $F(p)$ и $G(p)$. Някои от основните свойства на трансформацията на Лаплас и нейната обратна са изброени по-долу.

- *Линейност*: Трансформациите (5.1) и (5.2) са линейни оператори, т.е. за всеки $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ са изпълнени равенствата:

$$L[\lambda f(t)+\mu g(t);p]=\lambda L[f(t);p]+\mu L[g(t);p]=\lambda F(p)+\mu G(p)$$

$$L^{-1}[\lambda F(p)+\mu G(p);t]=\lambda L^{-1}[F(p);t]+\mu L^{-1}[G(p);t]=\lambda f(t)+\mu g(t).$$

- *Теорема на Борел за конволюцията*: За образа на конволюцията на $f(t)$ и $g(t)$

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

е в сила равенството

$$L[(f*g)(t);p]=F(p)G(p).$$

• *Диференциране на функция-оригинал*: Ако $f(t)$ е функция-оригинал, притежаваща производни от ред n $(n \in \mathbb{N})$, то

$$L[f^{(n)}(t);p] = p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1} f^{(k)}(0) = p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k f^{(n-k-1)}(0). \quad (5.4)$$

• *Диференциране на образ*: Ако трансформацията на Лаплас $F(p) = L[f(t);p]$ притежава производни от произволен ред n $(n \in \mathbb{N})$, то

$$F^{(n)}(p) = (-1)^n L[t^n f(t);p]. \quad (5.5)$$

• *Интегриране на функция-оригинал*: Ако $f(t)$ е функция-оригинал и $F(p) = L[f(t);p]$, то

$$L[\int_0^t f(\tau)d\tau;p] = \frac{F(p)}{p}. \quad (5.6)$$

• *Интегриране на образ*: Ако $f(t)$ е функция-оригинал с показател на ръста σ_0, и интегралът $\int_p^\infty F(q)dq$ е сходящ в полуравнината $\operatorname{Re} p > \sigma_1 > \sigma_0$, то

$$\int_p^\infty F(q)dq = L[\frac{f(t)}{t};p] \quad (5.7)$$

за $\operatorname{Re} p > \sigma_1 > \sigma_0$.

• *Теорема за закъснението*: Ако трансформацията на Лаплас $L[f(t);p] = F(p)$ и $t_0 > 0$, то

$$L[f(t-t_0)\eta(t-t_0);p] = F(p)\exp(-t_0 p). \quad (5.8)$$

• *Теорема за изпреварването*: Ако трансформацията на Лаплас $L[f(t);p] = F(p)$ и $t_0 > 0$, то

$$L[f(t+t_0)\eta(t);p] = [F(p) - \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t)dt]\exp(t_0 p). \quad (5.9)$$

• *Теорема за преместването*: Ако трансформацията на Лаплас $L[f(t);p]=F(p)$ за $\operatorname{Re}p>\sigma_0$ и a е произволно комплексно число, то

$$L[e^{at}f(t);p]=F(p-a) \text{ за } \operatorname{Re}(p-a)>\sigma_0. \tag{5.10}$$

• *Образ на периодичен оригинал*: Ако $f(t)$ е периодичен оригинал с период $T>0$, т.е. $f(t+T)=f(t)$ за всяко $t>0$, то трансформацията на Лаплас $F(p)=L[f(t);p]$ се пресмята по формулата:

$$F(p)=L[f(t);p]=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T e^{-pt}f(t)dt. \tag{5.11}$$

§6. Образи на някои функции

Като начало да приведем таблица на най-често използваните образи:

$$L[1;p]=\frac{1}{p};\ L[t^n;p]=\frac{n!}{p^{n+1}},\ n\in\mathbb{N};\ L[e^{\alpha t};p]=\frac{1}{p-\alpha};$$

$$L[\cos\alpha t;p]=\frac{p}{p^2+\alpha^2};\ L[\sin\alpha t;p]=\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2};$$

$$L[\operatorname{ch}\alpha t;p]=\frac{p}{p^2-\alpha^2};\ L[\operatorname{sh}\alpha t;p]=\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2},$$

след което да намерим образа на функцията $f(t)=t^\alpha$ за $\alpha\in\mathbb{C}$ при $\operatorname{Re}\alpha>-1$. За целта да припомним интегралната формула (2.3*), а именно:

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^\infty t^\alpha e^{-t}dt,\ \ \operatorname{Re}(\alpha+1)>0.$$

Замествайки в нея t с pt за $\operatorname{Re}p>0$, получаваме

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^\infty e^{-pt}p^\alpha t^\alpha p\,dt=p^{\alpha+1}\int_0^\infty e^{-pt}t^\alpha dt=p^{\alpha+1}L(t^\alpha;p),$$

т.е.

$$L[t^\alpha;p]=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}} \text{ за } \operatorname{Re}\alpha>-1. \tag{6.1}$$

С оглед прилагането на трансформацията на Лаплас за решаване на някои специални диференциални уравнения (т.н. уравнения от дробен ред), е важно да познаваме Лапласовия образ на $t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha})$, където $E_{\alpha,\beta}$ е двупараметричната функция (3.2) на Митаг-Лефлер, а именно

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\ \ \alpha>0,\beta>0\,.$$

В тази връзка се оказва полезна съществуващата аналогия на функцията (3.2) с експоненциалната функция e^z като неин частен случай, съгласно равенството (3.3).

Чрез представянето на експоненциалната функция в степенен ред

$$e^z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$$

и почленното му интегриране, получаваме

$$\int_0^{+\infty}e^{-t}e^{\pm zt}dt=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\pm z)^k}{k!}\int_0^{+\infty}t^ke^{-t}dt=\sum_{k=0}^{\infty}(\pm z)^k=\frac{1}{1\mp z},\ \ |z|<1.$$

Диференцирайки последователно двете страни на горното равенство относно z, намираме че

$$\int_0^{+\infty}e^{-t}t^ke^{\pm zt}dt=\frac{k!}{(1\mp z)^{k+1}},\ \ |z|<1.$$

По-нататък заместването на t с pt и на z с $\frac{a}{p}$ $\left(\frac{|a|}{|p|}<1\right)$ води до известните формули за трансформация на Лаплас на функциите $t^ke^{\pm at}$, а именно

$$L[t^ke^{\pm at};p]=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\left[t^ke^{\pm at}\right]dt=\frac{k!}{(p\mp a)^{k+1}}\ ,\ \ \text{за } |p|>|a|\,. \quad (6.2)$$

По напълно аналогичен начин може да се намери образът на функцията $t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha})$ чрез трансформацията на Лаплас. За целта, отчитайки (2.3*) и (3.2) и следвайки горе използваната идея, получаваме последователно:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(zt^{\alpha})dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\beta-1}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(zt^{\alpha})^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\right\}dt$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\int_0^{+\infty} t^{\alpha k+\beta-1}e^{-t}dt\right\}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}=\sum_{k=0}^{\infty}z^k=\frac{1}{1-z},\ |z|<1.$$

Замествайки t с pt, както и z с $\dfrac{a}{p^{\alpha}}$ $(|a|^{1/\alpha}<|p|)$ в горното равенство, получаваме формулата за трансформацията на Лаплас от функцията $t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha})$, а именно

$$L[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha});p]=\int_0^{+\infty} e^{-pt}\left[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha})\right]dt=\frac{p^{\alpha-\beta}}{p^{\alpha}-a}. \qquad (6.3)$$

Като се процедира аналогично на случая с експоненциалната функция e^{z}, последователното диференциране на двете страни на горното равенство относно a води до формулата за трансформацията на Лаплас на функциите от вида $t^{\alpha k+\beta-1}E^{(k)}_{\alpha,\beta}(\pm at^{\alpha})$, (виж Подлубни, [19], стр 21):

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}\left[t^{\alpha k+\beta-1}E^{(k)}_{\alpha,\beta}(\pm at^{\alpha})\right]dt=\frac{k!\,p^{\alpha-\beta}}{(p^{\alpha}\mp a)^{k+1}} \text{ за } |p|>|a|^{\frac{1}{\alpha}}$$

т.е .

$$L[t^{\alpha k+\beta-1}E^{(k)}_{\alpha,\beta}(at^{\alpha});p]=\frac{k!\,p^{\alpha-\beta}}{(p^{\alpha}\mp a)^{k+1}} \quad \text{за } |p|>|a|^{\frac{1}{\alpha}}. \qquad (6.4)$$

В частност, за $\alpha=\beta=\dfrac{1}{2}$, получаваме:

$$L\left[t^{(k-1)/2}E^{(k)}_{1/2,1/2}(\pm a\sqrt{t});p\right]=\frac{k!}{(\sqrt{p}\mp a)^{k+1}} \quad \text{за } |p|>|a|^2. \qquad (6.5)$$

Бележка 6.1. Условията $|p|>|a|^{\frac{1}{\alpha}}$ във формулите (6.2) – (6.5) често се заместват с по-силното условие $\operatorname{Re} p>|a|^{\frac{1}{\alpha}}$.

§7. Намиране на образ по зададен оригинал

1. Да се намерят образите на следните функции:

а) $f(t)=\cos^2(3t)+t\sin t+\frac{1}{2}t^2\sin t$

б) $f(t)=\int\limits_0^t \tau^2\sin\tau\, d\tau$

в) $f(t)=\operatorname{ch}^2(3t-6)\eta(t-2)$

г) $f(t)=\eta(t)+3t\eta(t-2)$

д) $f(t)=te^{-t}-\frac{1}{8}e^{2t}\cos(3t)-\frac{5}{8}e^{2t}\sin(3t)$

е) $f(t)=\left(te^{t}+\frac{1}{8}e^{t}-\frac{1}{8}e^{-t}\cos(2t)-\frac{5}{8}e^{-t}\sin(2t)\right)\eta(t)$.

Решение:

а) $f(t)=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cos(6t)+t\sin t+\frac{1}{2}t^2\sin t$

Тъй като $L[\sin t;p]=\frac{1}{p^2+1}$, то

$$L[t\sin t;p]=-\left(\frac{1}{p^2+1}\right)'=\frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2}, \text{ и } L[t^2\sin t;p]=\left(\frac{1}{p^2+1}\right)''=2\frac{3p^2-1}{\left(p^2+1\right)^3},$$

и понеже освен това $L[1;p]=\frac{1}{p}$ и $L[\cos(6t);p]=\frac{p}{p^2+36}$, то образът

$$\overline{f}(p)=\frac{1}{2p}+\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+36}+\frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2}+\frac{3p^2-1}{\left(p^2+1\right)^3}.$$

б) Като се вземе под внимание, че $L[t^2 \sin t](p) = \left(\dfrac{1}{p^2+1}\right)'' = 2\dfrac{3p^2-1}{\left(p^2+1\right)^3}$ и

съгласно равенството (5.6), за образа на функцията $f(t) = \int_0^t \tau^2 \sin\tau \, d\tau$, се получава

$$\overline{f}(p) = \frac{L[t^2 \sin t; p]}{p} = 2\frac{3p^2-1}{p\left(p^2+1\right)^3}.$$

в) $f(t) = \frac{1}{2} \cdot \eta(t-2)\left(1 + \operatorname{ch}(6(t-2))\right)$

Тъй като $\eta(t-2)$ е обобщената функция на Хевисайд, дефинирана с (1.2), то за намиране на образа на дадената функция $f(t)$ може да се приложи теоремата за закъснението със закъснение 2. Тогава, отчитайки факта, че $L[1; p] = \dfrac{1}{p}$, $L[\operatorname{ch}6t; p] = \dfrac{p}{p^2-36}$, и съгласно формула (5.8) получаваме, че:

$$L[f(t); p] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2-36}\right)e^{-2p}.$$

г) За $f(t) = \eta(t) + 3(t-2+2)\eta(t-2) = \eta(t) + 6\eta(t-2) + 3(t-2)\eta(t-2)$ също може да се приложи теоремата за закъснението. Тогава $L[\eta(t); p] = \dfrac{1}{p}$ и $L[t; p] = \dfrac{1}{p^2}$, откъдето отново според формула (5.6) получаваме:

$$L[f(t); p] = \frac{1}{p} + \frac{6}{p}e^{-2p} + \frac{3}{p^2}e^{-2p} = \frac{1}{p} + \frac{3\left(2p+1\right)}{p^2}e^{-2p}.$$

д) Тъй като $L[t; p] = \dfrac{1}{p^2}$, $L[\cos 3t; p] = \dfrac{p}{p^2+9}$, $L[\sin 3t; p] = \dfrac{3}{p^2+9}$, то

съгласно теоремата за преместването имаме:

$$L[te^{-t}; p] = \frac{1}{(p+1)^2},\ L[e^{2t}\cos 3t; p] = \frac{p-2}{(p-2)^2+9},$$

$$L[e^{2t}\sin 3t; p] = \frac{3}{(p-2)^2+9},$$

и следователно

$$\overline{f}(p)=\frac{1}{(p+1)^2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{p-2}{(p-2)^2+9}-\frac{15}{8}\cdot\frac{1}{(p-2)^2+9}=$$

$$=\frac{1}{(p+1)^2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{p-17}{(p-2)^2+9},$$

откъдето с помощта на СКА Maple получаваме окончателно

> $simplify\left(\frac{1}{(p+1)^2}-\frac{1}{8}\,\frac{p-17}{(p-2)^2+9}\right);$

$$-\frac{1}{8}\,\frac{-23\,p^2-p-121+p^3}{(p+1)^2\,(p^2-4\,p+13)}$$

т.е. образът на функцията $f(t)=t\,e^{-t}-\frac{1}{8}e^{2t}\cos(3t)-\frac{5}{8}e^{2t}\sin(3t)$ е

$$\overline{f}(p)=-\frac{1}{8}\cdot\frac{p^3-23p^2-p-121}{(p+1)^2(p^2-4p+13)}\ .$$

е) Тъй като

$L[e^t;p]=\frac{1}{p-1}$, $L[\cos 2t;p]=\frac{p}{p^2+4}$, $L[\sin 2t;p]=\frac{2}{p^2+4}$, то отново по теоремата за преместването,

$L[te^t;p]=\frac{1}{(p-1)^2}$, $L[e^{-t}\cos 2t;p]=\frac{p+1}{(p+1)^2+4}$,

$L[e^{-t}\sin 2t;p]=\frac{2}{(p+1)^2+4}$,

откъдето за $\overline{f}(p)$ получаваме последователно:

$$\overline{f}(p)=\frac{1}{(p-1)^2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(p-1)}-\frac{1}{8}\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+4}-\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{(p+1)^2+4},$$

$$\overline{f}(p)=\frac{1}{8}\cdot\frac{p+7}{(p-1)^2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{p+11}{(p^2+2p+5)}=\frac{1}{8}\cdot\frac{40p+24}{(p-1)^2(p^2+2p+5)}.$$

Окончателно намираме:

$$\overline{f}(p)=\frac{5p+3}{(p-1)^2(p^2+2p+5)}\ .$$

2. Дадени са функциите F и G:

1) Да се напише конволюцията на F и G.

2) Да се намери образът на тази конволюция чрез трансформацията на Лаплас.

а) $F(t)=(2e)^{3t}$, $G(t)=\cos(2t)$,

б) $F(t)=e^{3t+2}$, $G(t)=\operatorname{ch}(5t)$,

в) $F(t)=\operatorname{ch}(2t)$, $G(t)=t^3$,

г) $F(t)=\cos(2t)$, $G(t)=e^{3t-5}$,

д) $F(t)=\operatorname{ch}(4t)$, $G(t)=e^{3t+11}$,

е) $F(t)=e^{3t}\cos(6t)$, $G(t)=e^{3t}\sin(6t)$,

ж) $F(t)=t^6e^{6t}$, $G(t)=\operatorname{ch}(4t)$,

з) $F(t)=\sin(3t)$, $G(t)=e^{3t}\operatorname{ch}(2t)$,

и) $F(t)=e^{-33t}\operatorname{ch}(14t)$, $G(t)=e^{13t}$,

й) $F(t)=e^{5t}\sin(2t)$, $G(t)=\operatorname{ch}(2t)$,

к) $F(t)=\sin(6t)$, $G(t)=e^{6t}\operatorname{sh}(2t)$,

л) $F(t)=e^{3t}\sin t$, $G(t)=\operatorname{ch}(2t)$,

м) $F(t)=e^{-3t}\operatorname{sh}(14t)$, $G(t)=e^{13t+11}$,

н) $F(t)=e^{6-33t}\operatorname{ch}(6t)$, $G(t)=t^2e^{11t}$.

Бележка 7.1. Тук са дадени решенията на условията **а) б)** и **ж)**. Останалите примери се решават аналогично и са оставени за самостоятелна работа на любопитния читател.

Решение:

а) $F(t)=(2e)^{3t}$, $G(t)=\cos(2t)$,

В този случай за конволюцията се получава

$$F(t)*G(t)=\int_0^t F(t-\tau)G(\tau)\,d\tau=\int_0^t (2e)^{3(t-\tau)}\cos(2\tau)\,d\tau.$$

По-нататък е нужно да се намерят образите на функциите F и G:

$$L[F(t);p]=L[(2e)^{3t};p]=L[e^{3t\ln(2e)};p]=L[e^{3\ln(2e)t};p]=\frac{1}{p-3\ln(2e)},$$

$$L[G(t);p]=L[\cos(2t);p]=\frac{p}{p^2+4},$$

откъдето

$$L[F(t)*G(t)](p)=L[F(t)](p)\cdot L[G(t);p]=\frac{1}{p-3\ln(2e)}\cdot\frac{p}{p^2+4}.$$

б) $F(t)=e^{3t+2}=e^2e^{3t}$, $G(t)=\mathrm{ch}(5t)$

За конволюцията имаме

$$F(t)*G(t)=\int_0^t G(t-\tau)F(\tau)\,d\tau=e^2\int_0^t e^{3\tau}\mathrm{ch}(5(t-\tau))\,d\tau$$

и тъй като

$$L[F(t);p]=e^2\cdot\frac{1}{p-3}=\frac{e^2}{p-3},\quad L[G(t);p]=L[\mathrm{ch}(5t);p]=\frac{p}{p^2-25},$$

то

$$L[F(t)*G(t);p]=L[F(t);p]\cdot L[G(t);p]=\frac{e^2}{p-3}\cdot\frac{p}{p^2-25}.$$

ж) $F(t)=t^6e^{6t}$, $G(t)=\mathrm{ch}(4t)$

Конволюцията се дава с формулата

$$F(t)*G(t)=\int_0^t F(t-\tau)G(\tau)\,d\tau=\int_0^t (t-\tau)^6e^{6(t-\tau)}\,\mathrm{ch}(4\tau)\,d\tau$$

Тъй като $L[G(t);p]=L[\mathrm{ch}(4t);p]=\dfrac{p}{p^2-16}$ и $L[t^6;p]=\dfrac{6!}{p^7}$, то по теоремата

за преместването

$$L[F(t);p]=L[t^6e^{6t};p]=\frac{6!}{(p-6)^7},$$

и следователно

$$L[F(t)*G(t);p]=L[F(t);p]\cdot L[G(t);p]=\frac{6!}{(p-6)^7}\cdot\frac{p}{p^2-16}.$$

3. Да се намерят образите на следните функции:

а) $f(t)=\eta(t)t^{-1/2}E_{1/2,1/2}(4t^{1/2})$

б) $f(t)=\eta(t)\; t\; E'''_{1/2,1/2}(4t^{1/2})$

в) $f(t)=\eta(t)t^5E_{11,6}(-2t^{11})$

г) $f(t)=\eta(t)\; t^{38}E'''_{11,6}(-2t^{11})$

Решение: За да намерим търсените образи, ще се възползваме от формулите (6.3) –(6.5), а именно:

$$L[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha);p]=\frac{p^{\alpha-\beta}}{p^\alpha-a} \text{ за } |p|>|a|^{\frac{1}{\alpha}}; \tag{6.3}$$

$$L[t^{\alpha k+\beta-1}E^{(k)}_{\alpha,\beta}(at^\alpha);p]=\frac{k!p^{\alpha-\beta}}{(p^\alpha\mp a)^{k+1}} \text{ за } |p|>|a|^{\frac{1}{\alpha}}; \tag{6.4}$$

$$L\left[t^{(k-1)/2}\,E^{(k)}_{1/2,1/2}(\pm a\sqrt{t});p\right]=\frac{k!}{(\sqrt{p}\mp a)^{k+1}} \qquad \text{за } |p|>|a|^2. \tag{6.5}$$

а) В този случай прилагаме формулата (6.3) с $\alpha=\beta=1/2, a=4$, $\alpha-\beta=0$, $\beta-1=-1/2$, или директно формулата (6.5) с $k=0$ и $a=4$, при което получаваме, че $\overline{f}(p)=\dfrac{1}{\sqrt{p}-4}$.

б) В този случай прилагаме формулата (6.4) съответно с $k=3$, $a=4$, $\alpha=\beta=1/2$, $\alpha k+\beta-1=3/2+1/2-1=1$, или директно формулата (6.5) с $k=3$ и $a=4$, откъдето за образа получаваме $\overline{f}(p)=\dfrac{6}{(\sqrt{p}-4)^4}$.

в) Формулата (6.4), приложена за $k=0, \alpha=11, \alpha-\beta=5, a=-2$, $\beta=6$, $\beta-1=5$, или директно формулата (6.3) съответно със стойности $\alpha=11, \alpha-\beta=5, a=-2$, дават $\overline{f}(p)=\dfrac{p^5}{p^{11}+2}$.

г) Формулата (6.4), приложена за $k=3$, $\alpha=11$, $\alpha-\beta=5$, $a=-2$, $\beta=6$, $\beta-1=5$, $\alpha k+\beta-1=11.3+5=38$, води до резултата $\overline{f}(p)=\dfrac{3!p^5}{(p^{11}+2)^4}$.

§8. Намиране на оригинал по зададен образ

Формулата за обръщане (5.2) се използва в случаите, когато образите не са мероморфни (частно на две цели) функции и преходът от тях към оригиналите не може да се осъществи с методите, които са приведени по-надолу, или с теоремите от предишните параграфи. Тук ние няма да разглеждаме такива функции. Сега ще се спрем на теоремите за разлагането, които са свързани с обратната задача – намиране на оригинала по неговия образ, която задача се разглежда в този параграф.

Теорема 8.1. (***Първа теорема за разлагането***). *Ако функцията $F(p)$ е холоморфна в безкрайно отдалечената точка $p=\infty$, $F(\infty)=0$ и представянето в ред на Лоран в околността на тази точка има вида*

$$F(p)=\frac{c_0}{p}+\frac{c_1}{p^2}+\frac{c_2}{p^3}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{p^{n+1}} \tag{8.1}$$

то $F(p)$ е образ на функцията-оригинал $f(t)=\eta(t)f_1(t)$ където $\eta(t)$ е функцията на Хевисайд, а $f_1(t)$ е дефинирана със степенния ред

$$f_1(t)=c_0+\frac{c_1}{1!}t+\frac{c_2}{2!}t^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}t^n, \tag{8.2}$$

като $f_1(t)$ е функция с експоненциален ръст, т.е. $\left|f_1(t)\right|\le Me^{\sigma_0 t}$, $\sigma_0\ge 0$.

Теорема 8.2. (***Обобщена теорема за разлагането***). *Нека функцията $F(p)$ удовлетворява условията*

1) *$F(p)$ е еднозначна функция на комплексната променлива p, холоморфна в дясната полуравнина* $\operatorname{Re} p=\sigma>\sigma_0$, *а в лявата полуравнина* $\operatorname{Re} p=\sigma<\sigma_0$ *има крайно или изброимо множество изолирани особени точки – полюси или съществени особени точки.*

2) *Съществува растяща редица от положителни числа* $R_1, R_2, R_3, \ldots$, $\lim R_n=\infty$, такива че *върху окръжностите* $C_n:|p|=R_n$, *функцията* $F(p)$ *клони равномерно към нула при* $n\to\infty$. *С други думи, за всяко* $\varepsilon>0$ *съществува число* $N=N(\varepsilon)$, *такова, че при* $n>N(\varepsilon)$ *е в сила равенството* $|F(p)|<\varepsilon$ *за всички точки на окръжностите* $C_n:|p|=R_n$. *Това условие се удовлетворява в лявата полуравнина (където лежат особените точки на* $F(p)$*). В дясната полуравнина* $F(p)$ *клони равномерно към нула независимо от начина, по който* p *клони към безкрайност.*

3) $F(p)$ *е абсолютно интегруема по всяка права* $\operatorname{Re} p=\sigma\geq\sigma_1>\sigma_0$, т.е. $\displaystyle\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}|F(p)||dp|<\infty$.

Тогава оригиналът $f(t)$ *се пресмята по формулата* $f(t)=\eta(t)f_1(t)$ *с*

$$f_1(t)=L^{-1}[F(p);t]=\sum_k \operatorname*{Res}_{p=p_k}\left[e^{pt}F(p)\right], \tag{8.3}$$

където сумирането в дясната страна на равенството е по всички особени точки на $F(p)$.

1. Да се намерят оригиналите на следните функции:

а) $\overline{f}(p)=\dfrac{1}{p}\,e^{-1/p}$ **б)** $\overline{f}(p)=\dfrac{1}{p}\,e^{-1/p^2}$

в) $\overline{f}(p)=\dfrac{5p+3}{(p-1)^2(p^2+2p+5)}$ **г)** $\overline{f}(p)=\dfrac{1}{(p^2+1)^2}$

д) $\overline{f}(p)=\dfrac{p}{p^4-1}$ **е)** $\overline{f}(p)=\dfrac{1}{p^4-1}$

ж) $\overline{f}(p)=\dfrac{1}{\sqrt{p}-4}$ **з)** $\overline{f}(p)=\dfrac{6}{(\sqrt{p}-4)^4}$

и) $\overline{f}(p)=\dfrac{p^5}{p^{11}+2}$ **й)** $\overline{f}(p)=\dfrac{6p^5}{(p^{11}+2)^4}$

Решение.

а) Добре известно е, че функцията $\overline{f}$ се представя с реда

$$\overline{f}(p)=\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{p^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{p^{k+1}},$$

сходящ за всички стойности на p с $\mathrm{Re}(p)>0$. Тъй като $\dfrac{1}{p^{k+1}}=L\left(\dfrac{t^k}{k!}\right)$,

то търсеният оригинал е функцията $f(t)=\eta(t)f_1(t)$, където

$$f_1(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{t^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\sqrt{t}\right)^{2k}}{k!k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\sqrt{t}\right)^{2k}}{k!\Gamma(k+1)}=J_0(2\sqrt{t}),$$

$\eta(t)$ е единичната функция на Хевисайд, а J_ν е функцията на Бесел от първи род, дефинирана с равенството (3.6).

б) В този случай функцията $\overline{f}$ се представя с реда

$$\overline{f}(p)=\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{p^{2k}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{p^{2k+1}},$$

сходящ за всички стойности на p с $\mathrm{Re}(p)>0$. Тъй като $\dfrac{1}{p^{2k+1}}=L\left(\dfrac{t^{2k}}{(2k)!}\right)$,

то търсеният оригинал е функцията $f(t)=\eta(t)f_1(t)$, където

$$f_1(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{t^{2k}}{(2k)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-t^2\right)^k}{k!(2k)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-t^2\right)^k}{k!\Gamma(2k+1)}=J_0^2(t^2),$$

$\eta(t)$ е единичната функция на Хевисайд, а J_ν^μ е функцията на Бесел-Майтленд, дефинирана с равенството (3.7).

в) Функцията $\overline{f}(p)$ може да се представи като сума от елементарни дроби например с метода на неопределените коефициенти, но тук резултатът е получен с помощта на СКА Maple 13:

> $A := \frac{5\cdot p+3}{(p-1)^2\cdot(p^2+2\cdot p+5)}$;

$$\frac{5\,p+3}{(p-1)^2\,(p^2+2\,p+5)}$$

> $convert(A, parfrac, p)$;

$$\frac{1}{8}\,\frac{-p-11}{p^2+2\,p+5}+\frac{1}{8\,(p-1)}+\frac{1}{(p-1)^2}$$

Тогава за $\overline{f}(p)$ получаваме последователно:

$$\overline{f}(p)=\frac{1}{(p-1)^2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(p-1)}-\frac{1}{8}\cdot\frac{p+1}{(p^2+2p+5)}-\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{(p^2+2p+5)},$$

$$\overline{f}(p)=\frac{1}{(p-1)^2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(p-1)}-\frac{1}{8}\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+4}-\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{(p+1)^2+4},$$

откъдето, като се има предвид Теоремата за преместването и таблицата за образите (§7), се получава търсеният оригинал:

$$f(t)=\left(t\,e^t+\frac{1}{8}e^t-\frac{1}{8}e^{-t}\cos(2t)-\frac{5}{8}e^{-t}\sin(2t)\right)\eta(t).$$

г) Функцията $\overline{f}$ може да се представи като произведение от вида

$$\overline{f}(p)=\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}.$$

Тогава, съгласно теоремата на Борел за конволюцията, получаваме $f(t)=\eta(t)\left(\sin t*\sin t\right)$.

Пресмятането на горната конволюция може да се извърши по следния начин:

$$\left(\sin t * \sin t\right) = \int_0^t \sin\tau \sin(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \left(\cos(2\tau - t) - \cos t\right) d\tau =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\sin(2\tau - t) - \frac{1}{2}\tau\cos t\right)\Big|_{\tau=0}^{t} = \frac{1}{2}\left(\sin t - t\cos t\right).$$

Следователно, оригиналът на функцията е

$$f(t) = \frac{1}{2}\eta(t)\left(\sin t - t\cos t\right).$$

д) Ще намерим оригинала по няколко начина:

I начин) Функцията $\overline{f}$ може да се представи както следва

$$\overline{f}(p) = \frac{p}{p^4 - 1} = \frac{p}{p^2 - 1}\cdot\frac{1}{p^2 + 1} = \frac{1}{p^2 - 1}\cdot\frac{p}{p^2 + 1},$$

след което да се приложи теоремата на Борел за конволюцията.

II начин) Полюсите на $\overline{f}$ са $p_{1,2} = \pm 1$ и $p_{3,4} = \pm i$.

По-надолу са намерени резидуумите $\operatorname{Res}\left(p_k\right)$ за функцията

$$\overline{f}(p)e^{pt} = \frac{p\,e^{pt}}{p^4 - 1}\ .$$

Тъй като p_k са прости полюси на $\overline{f}(p)e^{pt}$, то $\operatorname{Res}\left(p_k\right)$ могат да се пресметнат по формулата

$$\operatorname{Res}\left(p_k\right) = \frac{p\,e^{pt}}{\left(p^4 - 1\right)'}\Big|_{p=p_k} = \frac{e^{pt}}{4p^2}\Big|_{p=p_k},$$

т. е.

$$\operatorname{Res}\left(p_{1,2}\right) = \frac{e^{\pm t}}{4}\ ,\ \operatorname{Res}\left(p_{3,4}\right) = -\frac{e^{\pm it}}{4},$$

откъдето

$$\sum_{k=1}^{4}\operatorname{Res}\left(p_k\right) = \frac{e^t}{4} + \frac{e^{-t}}{4} - \left(\frac{e^{it}}{4} + \frac{e^{-it}}{4}\right) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} t - \cos t)\ ,$$

и следователно

$$f(t) = \frac{1}{2}\eta(t)(\operatorname{ch} t - \cos t)\ .$$

III начин) Най-сетне, за да се убедим, че не винаги вторият начин е най-лесен, представяме $\overline{f}$ във вида

$$\overline{f}(p)=\frac{p}{p^4-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+1},$$

откъдето отново $f(t)=\frac{1}{2}\eta(t)(\mathrm{ch}t-\cos t)$.

е) Тъй като $\overline{f}(p)=\frac{1}{p^4-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2+1}$, то търсеният оригинал е функцията $f(t)=\frac{1}{2}\eta(t)(\mathrm{sh}t-\sin t)$.

ж) Функцията $\overline{f}$ е функция от вида $\overline{f}(p)=\frac{p^{\alpha-\beta}}{p^\alpha-a}$, която е образ на оригинала $f(t)=\eta(t)t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)$ с $\alpha=\beta=1/2, a=4$, $\beta-1=-1/2$, т.е. търсеният оригинал е $f(t)=\eta(t)t^{-1/2}E_{1/2,1/2}(4t^{1/2})$.

з) В случая е подходящо да се използва формулата (6.4) или (6.5) със стойности $k=3$, $\alpha=\beta=1/2$, $a=4$, $\alpha k+\beta-1=3/2-1/2=1$, при което получаваме

$$f(t)=\eta(t)t^{3/2-1/2}E'''_{1/2,1/2}(4t^{1/2})=\eta(t)\,t\,E'''_{1/2,1/2}(4t^{1/2}).$$

и) Подходящо е директното използване на формулата (6.3) със стойности $\alpha=11, \alpha-\beta=5, a=-2$, $\beta=6$, $\beta-1=5$, при което $f(t)=\eta(t)t^5E_{11,6}(-2t^{11})$.

й) За намиране на оригинала е удобно да се приложи формулата (6.4) съответно за стойностите $k=3$, $\alpha=11$, $\alpha-\beta=5$, $a=-2$, $\beta=6$, $\beta-1=5$, $\alpha k+\beta-1=11.3+5=38$, което довежда до следния резултат:

$$f(t)=\eta(t)t^{11.3+5}E'''_{11,6}(-2t^{11})=\eta(t)\,t^{38}E'''_{11,6}(-2t^{11}).$$

§9. Приложение на Операционното смятане към някои диференциални, интегрални и интегро-диференциални уравнения и системи

Дотук се занимавахме със задачата за намиране на лапласов образ на функция оригинал, а също така и с обратната задача за намиране на оригинала на зададен образ. Сега предстои да приложим получените знания и умения за решаване на някои видове диференциални, интегрални, интегро-диференциални уравнения, както и системи от такива, съблюдавайки следния алгоритъм:

1) Намиране на Лапласовия образ на даденото уравнение или система

2) Намиране на решението на трансформираното уравнение или система, т.е. трансформираните неизвестни функции

3) Намиране оригиналите на получените в точка 2) решения.

1. Като се използва трансформацията на Лаплас, да се намери решението на задачата на Коши $x''+4x=2\sin 2t;\ x(0)=-1,\ x'(0)=0$.

Решение: Намираме образа на даденото диференциално уравнение с трансформацията на Лаплас, именно $L[x'']+4L[x]=2L[\sin 2t]$. Означавайки $L[x;p]=\overline{X}(p)$ и отчитайки дадените начални условия, получаваме:

$$p^2\overline{X}(p)-p\,x(0)-x'(0)+4\overline{X}(p)=\frac{4}{p^2+4},$$

откъдето

$$\overline{X}(p)=\frac{2}{p^2+4}\cdot\frac{2}{p^2+4}-\frac{p}{p^2+4}.$$

Тогава търсеното решение на задачата на Коши е

$$x(t)=(\sin 2t)*(\sin 2t)-\cos 2t=\int_0^t \sin 2\tau \sin 2(t-\tau)\,d\tau-\cos 2t=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t[\cos(4\tau-2t)-\cos 2t]\,d\tau-\cos 2t=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2t-t\cos 2t\right)-\cos 2t=$$

$$=\frac{1}{4}\sin 2t-\cos 2t-\frac{1}{2}t\cos 2t.$$

2. Да се намери общото решение на диференциалното уравнение

$$x''+2x'+5x=te^t$$

Решение: Означавайки $L[x;p]=\overline{X}(p)$, за лапласовия образ на диференциалното уравнение получаваме

$$p^2\overline{X}(p)-p\,x(0)-x'(0)+2\left(p\overline{X}(p)-x(0)\right)+5\overline{X}(p)=\frac{1}{(p-1)^2}.$$

Тогава

$$\overline{X}(p)=\frac{(p+1)\,x(0)}{(p+1)^2+4}+\frac{x(0)+x'(0)}{(p+1)^2+4}+\frac{1}{(p-1)^2(p^2+2p+5)}.$$

След като представим последното събираемо като сума от елементарни дроби, което тук е направено с помощта на СКА Maple 13,

$$> B := \frac{1}{(p-1)^2\cdot\left(p^2+2\cdot p+5\right)};$$

$$\frac{1}{(p-1)^2\left(p^2+2p+5\right)}$$

$$> convert(\mathrm{B}, parfrac, p);$$

$$\frac{1}{8\,(p-1)^2}+\frac{1}{16}\,\frac{p+1}{p^2+2p+5}-\frac{1}{16\,(p-1)}$$

получаваме

$$\overline{X}(p)=\frac{(p+1)x(0)}{(p+1)^2+4}+\frac{x(0)+x'(0)}{(p+1)^2+4}+$$

$$+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(p-1)^2}+\frac{1}{16}\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+4}-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{p-1},$$

откъдето

$$x(t)=x(0)e^{-t}\cos(2t)+\frac{x(0)+x'(0)}{2}\,e^{-t}\sin(2t)+\frac{1}{8}te^{t}+\frac{1}{16}e^{-t}\cos(2t)-\frac{1}{16}e^{t},$$

т.е.

$$x(t)=\left(\left(x(0)+\frac{1}{16}\right)\cos(2t)+\frac{x(0)+x'(0)}{2}\sin(2t)\right)e^{-t}+\frac{1}{16}(2t-1)e^{t}.$$

3. Да се намери решението на задачата на Коши

$$\begin{vmatrix} x'-x-2y=0 \\ y'-2x-y=0 \end{vmatrix}; \qquad x(0)=0, \;\; y(0)=6.$$

Решение. Трансформираната система

$$\begin{vmatrix} (p-1)\overline{X}(p) - 2\overline{Y}(p) = 0 \\ -2\overline{X}(p)+(p-1)\overline{Y}(p)=6 \end{vmatrix}$$

има решение

$$\overline{X}(p)=6\frac{2}{(p-1)^2-4}, \quad \overline{Y}(p)=6\frac{p-1}{(p-1)^2-4},$$

откъдето решението на задачата на Коши е

$$x(t)=6e^t\operatorname{sh}(2t), \; y(t)=6e^t\operatorname{ch}(2t).$$

4. Да се намерят решенията на интегралните уравнения и системите от интегрални и интегрално-диференциални уравнения:

а) $\displaystyle\int_0^t (t-\tau)^2 x(\tau)\,d\tau = \operatorname{sh} t - \sin t$

Решение. Лапласовия образ на даденото интегрално уравнение намираме с използване на таблицата на образите и теоремата на Борел за конволюцията. Получаваме

$$\overline{X}(p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2-1},$$

откъдето следва, че търсеното решение е функцията

$$x(t)=\frac{1}{2}\left(\cos t+\operatorname{ch} t\right).$$

б) $\displaystyle x(t)=1-\cos t+\int_0^t \sin(t-\tau)x(\tau)\,d\tau$

Решение. За лапласовия образ на даденото интегрално уравнение получаваме $\overline{X}(p)=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{p^2+1}\overline{X}(p)$, откъдето

$$\frac{p^2}{p^2+1}\overline{X}(p)=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}=\frac{1}{p(p^2+1)},$$

т.е. $\overline{X}(p)=\frac{1}{p^3}$, и следователно решението на даденото интегрално уравнение е функцията $x(t)=\frac{t^2}{2}$.

в) $x(t)+\frac{a}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}x(\tau)\,d\tau=f(t)$, $\alpha>0$, където a е реален или комплексен параметър, а функцията $f(t)\eta(t)$ е даден лапласов оригинал.

Решение. Даденото уравнение е добре известното интегрално уравнение на Абел от втори род. Чрез прилагане на трансформацията на Лаплас към двете страни на даденото уравнение и съгласно теоремата на Борел за конволюцията, намираме

$$L[x(t),p]+\frac{a}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)}{p^\alpha}L[x(t);p]=L[f(t);p],$$

откъдето следва, че

$$L[x(t),p]=\frac{p^\alpha}{p^\alpha+a}L[f(t);p]=p\,\frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha+a}L[f(t);p].$$

Сега, чрез прилагане на обратната трансформация на Лаплас, и отново съгласно теоремата на Борел, формулата (6.3) и правилото за диференциране на функция оригинал, намираме решението на даденото уравнение във вида

$$x(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t E_{\alpha,1}(-a\tau^\alpha)\,f(t-\tau)\,d\tau.$$

г) $$\begin{cases} 2x'(t)+x(t)-2y(t)+\int\limits_0^t (1+t-\tau)y(\tau)\,d\tau=0 \\ x'(t)-y'(t)+x(t)+\int\limits_0^t e^{t-\tau}x(\tau)\,d\tau=0 \end{cases}; \qquad x(0)=0,\ y(0)=1$$

Решение. Лапласовият образ на дадената система от интегрално-диференциални уравнения е

$$\begin{cases} (2p+1)\overline{X}-\left(2-\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p^2}\right)\overline{Y}=0 \\ \left(p+1+\dfrac{1}{p-1}\right)\overline{X}-p\overline{Y}=-1 \end{cases}. \tag{9.1}$$

Тъй като

$$2-\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}=\frac{2p^2-p-1}{p^2}=\frac{(2p+1)(p-1)}{p^2}, \text{ и } \ p+1+\frac{1}{p-1}=\frac{p^2}{p-1},$$

системата (9.1) се свежда до

$$\begin{cases} p^2\overline{X}-(p-1)\overline{Y}=0 \\ \dfrac{p^2}{p-1}\overline{X}-p\overline{Y}=-1 \end{cases},$$

откъдето $\overline{X}=\dfrac{1}{p^2}$, $\overline{Y}=\dfrac{1}{p-1}$ и следователно решението на дадената система е

$x(t)=t,\ \ y(t)=e^t$.

д) $$\begin{cases} x(t)=t^2+\int\limits_0^t y(\tau)\,d\tau \\ y(t)=t+\int\limits_0^t z(\tau)\,d\tau \\ z(t)=t+\int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau \end{cases}.$$

Решение. Намираме лапласовия образ на дадената система от интегрални уравнения използвайки таблицата за образи и теоремите на операционното смятане

$$\begin{cases} p^3\overline{X}(p)-p^2\overline{Y}(p)=2 \\ p^2\overline{Y}(p)-p\overline{Z}(p)=1 \\ -p\overline{X}(p)+p^2\overline{Z}(p)=1 \end{cases} \tag{9.2}$$

По-нататък, намирането на решението на системата (9.2), както и представянето му като сума от елементарни дроби е получено с помощта на СКА Maple 13:

> $solve\left(\{p^2\cdot Y-p\cdot Z-1, p^3\cdot X-p^2\cdot Y-2, -p\cdot X+p^2\cdot Z-1\}, [X, Y, Z]\right)$

$$\left[\left[X=\frac{3p+1}{p\left(p^3-1\right)}, Y=\frac{2+p^2+p^3}{\left(p^3-1\right)p^2}, Z=\frac{3+p^2}{p\left(p^3-1\right)}\right]\right]$$

> $convert(X, parfrac, p);$

$$-\frac{1}{p}+\frac{1}{3}\,\frac{-p-5}{p^2+p+1}+\frac{4}{3\,(p-1)}$$

$$\overline{X}(p)=-\frac{1}{p}-\frac{1}{3}\cdot\frac{(p+1/2)+9/2}{(p+1/2)^2+3/4}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{(p-1)},$$

$$x(t)=-1-\frac{1}{3}\cdot e^{-t/2}\cos\left(\sqrt{3}t/2\right)-\sqrt{3}\cdot e^{-t/2}\sin\left(\sqrt{3}t/2\right)+\frac{4}{3}\cdot e^{t};$$

> $convert(Y, parfrac, p);$

$$-\frac{2}{p^2}+\frac{1}{3}\,\frac{-4p+1}{p^2+p+1}+\frac{4}{3\,(p-1)}$$

$$\overline{Y}(p)=-\frac{2}{p^2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{4(p+1/2)-3}{(p+1/2)^2+3/4}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{(p-1)},$$

$$y(t)=-t-\frac{4}{3}\cdot e^{-t/2}\cos\left(\sqrt{3}t/2\right)+\frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-t/2}\sin\left(\sqrt{3}t/2\right)+\frac{4}{3}\cdot e^{t}$$

;

> $convert\,(Z, parfrac\,, p);$

$$-\frac{3}{p}+\frac{1}{3}\,\frac{5\,p+4}{p^2+p+1}+\frac{4}{3\,(p-1)}$$

$$\overline{Z}(p)=-\frac{3}{p}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5(p+1/2)+3/2}{(p+1/2)^2+3/4}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{(p-1)},$$

$$z(t)=-3+\frac{5}{3}\cdot e^{-t/2}\cos\left(\sqrt{3}t/2\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-t/2}\sin\left(\sqrt{3}t/2\right)+\frac{4}{3}\cdot e^{t}\ .$$

И така, решението на системата от интегрални уравнения е:

$$x(t)=-1-\frac{1}{3}\cdot e^{-t/2}\cos\left(\sqrt{3}t/2\right)-\sqrt{3}\cdot e^{-t/2}\sin\left(\sqrt{3}t/2\right)+\frac{4}{3}\cdot e^{t},$$

$$y(t)=-t-\frac{4}{3}\cdot e^{-t/2}\cos\left(\sqrt{3}t/2\right)+\frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-t/2}\sin\left(\sqrt{3}t/2\right)+\frac{4}{3}\cdot e^{t}\ ,$$

$$z(t)=-3+\frac{5}{3}\cdot e^{-t/2}\cos\left(\sqrt{3}t/2\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-t/2}\sin\left(\sqrt{3}t/2\right)+\frac{4}{3}\cdot e^{t}\ .$$

§10. Метод на Дюамел за задача на Коши с нулеви начални условия

Нека $f(t)$ и $g(t)$ са функции-оригинали, които са тъждествено равни на нула за $t<0$ *и* да разгледаме конволюцията φ на тези функции, дефинирана с равенството (5.3), а именно:

$$\varphi(t)=(f*g)(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\ .$$

Оказва се, че за първата производна на функцията φ, е в сила следната теорема.

Теорема 10.1. *Ако едната от функциите* f и g *е диференцируема, а другата е непрекъсната и*

$$L[\varphi(t);p]=L[(f*g)(t);p]=L\left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau;p\right]=F(p)G(p),$$

то е удовлетворена зависимостта:

$$L\left[\int_0^t g(\tau)f'_t(t-\tau)d\tau+f(0)g(t);p\right]=pF(p)G(p), \qquad (10.1)$$

или

$$L\left[\int_0^t f(\tau)g'_t(t-\tau)d\tau+g(0)f(t);p\right]=pF(p)G(p). \qquad (10.2)$$

Доказателство. Както се вижда непосредствено от формулата, с която е дефинирана конволюцията, $\varphi(0)=0$. Тогава

$$L\left[\varphi'(t);p\right]=pL\left[\varphi(t);p\right]-\varphi(0)=pL\left[\varphi(t);p\right]=pF(p)G(p). \qquad (10.3)$$

От друга страна, $\varphi(t)$ представлява интеграл, зависещ от параметъра t, за производната на който е известно (виж напр. Фихтенголц [23]), че

$$\varphi'(t)=\int_0^t g(\tau)f'_t(t-\tau)d\tau+f(0)g(t). \qquad (10.4)$$

$$L\left[\varphi'(t);p\right]=L\left[\int_0^t g(\tau)f'_t(t-\tau)d\tau+f(0)g(t);p\right]=pF(p)G(p),$$

което не е нещо друго, а равенството (10.1).

Поради комутативността на конволюцията можем да запишем производната ѝ във вида

$$\varphi'(t)=\int_0^t f(\tau)g'_t(t-\tau)d\tau+g(0)f(t), \qquad (10.5)$$

което заедно с (10.3) потвърждава валидността на (10.2). С това теоремата е доказана. ◄

Изразът (10.4) (както и (10.5)) за първи път е използван от Дюамел (1853г.) и се нарича ***интеграл на Дюамел.***

И така, ако едната от функциите $f(t)$ и $g(t)$ е диференцируема, а другата е непрекъсната, то конволюцията φ на тези функции е диференцируема функция и

$$L[\varphi'(t);p]=L[\frac{d}{dt}(f*g)(t);p]=pF(p)G(p), \tag{10.6}$$

или, еквивалентното му

$$L^{-1}\left[pF(p)G(p)\right]=\varphi'(t)=\frac{d}{dt}\left[(f*g)(t)\right]. \tag{10.6*}$$

Интегралът на Дюамел се използва за намиране на решенията на някои видове диференциални уравнения, по-специално при решаване на задача на Коши за линейни диференциални уравнения от n-ти ред с нулеви начални условия.

Нека a_k $(k=1,2,...,n)$ са реални константи, а $f(t)$ е даден лапласов оригинал. Търси се решението на диференциалното уравнение

$$x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+...+a_nx(t)=f(t), \tag{10.7}$$

което удовлетворява нулевите начални условия

$$x(0)=x'(0)=...=x^{(n-1)}(0). \tag{10.8}$$

За целта най-напред ще намерим решението на диференциално уравнение със същата лява страна като в (10.7), но с дясна срана равна на единица, т.е.

$$y^{(n)}(t)+a_1y^{(n-1)}(t)+...+a_ny(t)=1. \tag{10.9}$$

Ще търсим решение на това уравнение също с нулеви начални условия, а именно $y(0)=y'(0)=...=y^{(n-1)}(0)$.

Означавайки $L[y(t),p]=Y(p)$, образът на уравнението (10.9) придобива вида

$$p^nY(p)+a_1p^{n-1}Y(p)+...+a_nY(p)=\frac{1}{p},$$

откъдето

$$Y(p)=\frac{1}{p\left(p^n+a_1p^{n-1}+...+a_n\right)}. \tag{10.10}$$

Да се върнем сега към уравнението (10.7). Означавайки

$$L[x(t),p]=X(p),\ L[f(t),p]=F(p),$$

преобразуваното уравнение добива вида

$$p^nX(p)+a_1p^{n-1}X(p)+...+a_nX(p)=F(p),$$

откъдето

$$X(p)=\frac{F(p)}{p^n+a_1p^{n-1}+...+a_n}, \tag{10.11}$$

след което, съпоставяйки (10.10) и (10.11) получаваме, че

$$X(p)=pF(p)Y(p). \tag{10.12}$$

Тогава използвайки интеграла на Дюамел и равенството (10.6*), получаваме:

$$x(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)y(t-\tau)d\tau=\frac{d}{dt}(f*y)(t), \tag{10.13}$$

или

$$x(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t y(\tau)f(t-\tau)d\tau=\frac{d}{dt}(f*y)(t). \tag{10.14}$$

И така, оказва се, че знаейки решението на уравнението (10.7) при $f(t)=1$ и нулеви начални условия, веднага може да се намери решението на това уравнение в квадратури за произволна функция оригинал $f(t)$ също при нулеви начални условия.

1. Като се използва интегралът на Дюамел, да се намери решението $x(t)$ на задачата на Коши с нулеви начални условия

а) $x''+x'=t$ при условие, че $x(0)=x'(0)=0$

Решение. Като начало намираме решението на уравнението $y''+y'=1$ с дясна страна равна на 1 при нулеви начални условия, чийто лапласов образ е

$$p^2Y(p)+pY(p)=\frac{1}{p}.$$

Следователно

$$Y(p)=\frac{1}{p^2\left(p+1\right)}=\frac{1-p^2+p^2}{p^2\left(p+1\right)}=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1},$$

откъдето решението $y(t)=t-1+e^{-t}$. Следователно, според (10.14)

$$x(t)=\frac{d}{dt}\left[t*\left(t-1+e^{-t}\right)\right]=\frac{d}{dt}\int_0^t(t-\tau)\left(\tau-1+e^{-\tau}\right)d\tau,$$

или непосредствено от (10.4)

$$x(t)=\frac{d}{dt}\left[t*\left(t-1+e^{-t}\right)\right]=\int_0^t(t-\tau)'_t\left(\tau-1+e^{-\tau}\right)d\tau+\left[(t-\tau)\left(\tau-1+e^{-\tau}\right)\right]_{|\tau=t}$$

$$=\int_0^t\left(\tau-1+e^{-\tau}\right)d\tau=\frac{t^2}{2}-t+1-e^{-t}.$$

б) $x'''-x'=\frac{1}{1+\text{ch}t}$ при условие, че $x(0)=x'(0)=x''(0)$

Най-напред намираме решението на задачата на Коши за уравнението $y'''-y'=1$ при нулеви начални условия $y(0)=y'(0)=y''(0)$. От лапласовия му образ $p^3Y(p)-pY(p)=\dfrac{1}{p}$ получаваме

$$Y(p)=\frac{1}{p^2\left(p^2-1\right)}=\frac{1}{p^2-1}-\frac{1}{p^2},$$

откъдето следва, че решението на тази задача е

$$y(t)=\mathrm{sh}t-t.$$

Следователно, според (10.13), решението на първоначално дадената задача е

$$x(t)=\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{1+\mathrm{ch}t}*\left(\mathrm{sh}t-t\right)\right]=\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{1}{1+\mathrm{ch}\,\tau}\left(\mathrm{sh}(t-\tau)-(t-\tau)\right)d\tau,$$

или непосредствено от (10.5)

$$x(t)=\int_0^t\left(\mathrm{sh}(t-\tau)-(t-\tau)\right)'_t\ \frac{1}{1+\mathrm{ch}\,\tau}d\tau+\left[\left(\mathrm{sh}(t-\tau)-(t-\tau)\right)\frac{1}{1+\mathrm{ch}\,\tau}\right]_{|\tau=t}$$

$$=\int_0^t\ \frac{\mathrm{ch}(t-\tau)-1}{1+\mathrm{ch}\,\tau}d\tau.$$

За пресмятането на последния интеграл преобразуваме подинтегралната функция както следва:

$$\frac{\mathrm{ch}(t-\tau)-1}{1+\mathrm{ch}\,\tau}=\frac{\mathrm{ch}t\,\mathrm{ch}\,\tau-\mathrm{sh}t\,\mathrm{sh}\,\tau-1}{1+\mathrm{ch}\,\tau}=\frac{\mathrm{ch}t\,\mathrm{ch}\,\tau+\mathrm{ch}t-\mathrm{ch}t-1-\mathrm{sh}t\,\mathrm{sh}\,\tau}{1+\mathrm{ch}\,\tau}=$$

$$=\frac{\mathrm{ch}t(\mathrm{ch}\,\tau+1)-(\mathrm{ch}t+1)-\mathrm{sh}t\,\mathrm{sh}\,\tau}{1+\mathrm{ch}\,\tau}=\mathrm{ch}t-\frac{\mathrm{ch}t+1}{1+\mathrm{ch}\,\tau}-\frac{\mathrm{sh}t\,\mathrm{sh}\,\tau}{1+\mathrm{ch}\,\tau}=$$

$$=\mathrm{ch}t-(\mathrm{ch}t+1)\cdot\frac{1}{2\mathrm{ch}^2(\tau/2)}-\mathrm{sh}t\frac{\mathrm{sh}\,\tau}{1+\mathrm{ch}\,\tau}.$$

Тогава за решението $x(t)$ намираме последователно:

$$x(t)=\operatorname{ch}t\int_0^t d\tau-(\operatorname{ch}t+1)\int_0^t \frac{1}{2\operatorname{ch}^2(\tau/2)}d\tau-\operatorname{sh}t\int_0^t \frac{\operatorname{sh}\tau}{1+\operatorname{ch}\tau}d\tau\,,$$

$$x(t)=t\operatorname{ch}t-(\operatorname{ch}t+1)\operatorname{th}(t/2)-\operatorname{sh}t\,\ln(1+\operatorname{ch}\tau)\Big|_{\tau=0}^{t}=$$

$$=t\operatorname{ch}t-(\operatorname{ch}t+1)\operatorname{th}(t/2)-\operatorname{sh}t\,\big(\ln(1+\operatorname{ch}t)-\ln 2\big).$$

И тъй като

$$(\operatorname{ch}t+1)\operatorname{th}(t/2)=2\operatorname{ch}^2(t/2)\operatorname{th}(t/2)=2\operatorname{sh}(t/2)\operatorname{ch}(t/2)=\operatorname{sh}t\,,$$

$$\ln(1+\operatorname{ch}t)-\ln 2=\ln\Big(2\operatorname{ch}^2(t/2)\Big)-\ln 2=$$

$$=\ln 2+\ln\Big(\operatorname{ch}^2(t/2)\Big)-\ln 2=2\ln\Big(\operatorname{ch}(t/2)\Big),$$

то окончателно за решението на дадената задача намираме

$$x(t)=t\operatorname{ch}t-\operatorname{sh}t-2\operatorname{sh}t\ln\Big(\operatorname{ch}(t/2)\Big)=t\operatorname{ch}t-\Big[1+2\ln\Big(\operatorname{ch}(t/2)\Big)\Big]\operatorname{sh}t\ ,$$

т.е.

$$x(t)=t\operatorname{ch}t-\Big[1+2\ln\Big(\operatorname{ch}(t/2)\Big)\Big]\operatorname{sh}t\ .$$

Следвайки горе изложения алгоритъм, могат да се решат и примерите от следващата задача, които оставяме на любезното внимание на любопитния читател.

2. Като се използва интегралът на Дюамел, да се намерят решенията $x(t)$ на следните диференциални уравнения, които удовлетворяват нулевите начални условия:

а) $x'''-x'=\dfrac{2}{1+\operatorname{ch}t}$; $x(0)=x'(0)=x''(0)$.

б) $x'''-x'=\dfrac{3}{1+\operatorname{sh}t}$; $x(0)=x'(0)=x''(0)$.

в) $x'''-x'=\dfrac{4}{1+\operatorname{ch}2t}$; $x(0)=x'(0)=x''(0)$.

г) $x'''-x'=\dfrac{5e^t}{1+\operatorname{ch}t}$; $x(0)=x'(0)=x''(0)$.

д) $x''' - x' = \dfrac{6}{1-\mathrm{sh}t}$; $x(0) = x'(0) = x''(0)$.

е) $x''' - x' = \dfrac{7e^{t}}{1+\mathrm{sh}t}$; $x(0) = x'(0) = x''(0)$.

ж) $x''' + x' = \dfrac{2}{1+\cos t}$; $x(0) = x'(0) = x''(0)$.

з) $x''' + x' = \dfrac{3}{1+\sin t}$; $x(0) = x'(0) = x''(0)$.

и) $x''' + x' = \dfrac{4}{1+\cos 2t}$; $x(0) = x'(0) = x''(0)$.

й) $x''' + x' = \dfrac{5}{1-\cos t}$; $x(0) = x'(0) = x''(0)$.

к) $x''' + x' = \dfrac{6}{1-\sin t}$; $x(0) = x'(0) = x''(0)$.

л) $x''' + x' = \dfrac{7}{1+\sin t}$; $x(0) = x'(0) = x''(0)$.

н) $x'' - 4x' + 4x = \dfrac{8e^{2t}}{1+\mathrm{ch}2t}$; $x(0) = x'(0) = 0$.

о) $x'' - 4x' + 4x = \dfrac{9e^{2t}}{1-\mathrm{ch}2t}$; $x(0) = x'(0) = 0$.

п) $x'' + 4x = \dfrac{10}{1+\cos 2t}$; $x(0) = x'(0) = 0$.

р) $x'' + 4x = \dfrac{11}{1-\cos 2t}$; $x(0) = x'(0) = 0$.

§11. Дробен интеграл на Риман-Лиувил. Уравнение на Абел от първи род

Исак Нютон (1642-1727) и Готфрид Вилхелм Лайбниц (1646-1716), независимо един от друг, полагат основите на диференциалното смятане през седемнадесети век. В своите изследвания Лайбниц пръв въвежда символа $\dfrac{d^n y}{dx^n} = D^n y$ за производна от n-ти ред, където n е неотрицателно цяло число.

В свое писмо до Лайбниц през 1695 г., Лопитал задава въпроса какъв би бил смисълът на този символ, ако n е дробно число, например $n=\frac{1}{2}$. В отговора си Лайбниц отбелязва, че това е очевиден парадокс, но един ден вероятно ще доведе до полезни последствия.

Тук ние се ограничаваме с разглеждане единствено на операторите на Риман-Лиувил за интегриране и диференциране от произволен ред. По тази причина наред с дефинициите, накратко ще изложим основните им свойства, които използваме по-нататък в текста.

По-подробни сведения за операторите на дробното смятане и техните приложения могат да се намерят например в книгите [6], [10], [12], [19] и [24].

Нека да означим с $C=C(0,+\infty)$ класа на функциите, по части непрекъснати в интервала $(0,+\infty)$, които са интегруеми върху всеки краен подинтервал на $[0,+\infty)$.

Бележка 11.1. Всъщност функциите от класа $C=C(0,+\infty)$ могат да имат и „интегрална" особеност от ред $r<1$ в точката $x=a$, т.е.

$$\lim_{x\to a}(x-a)^r f(x)=const\ (\neq 0).$$

Дефиниция 1.1. Нека $\operatorname{Re}\alpha>0$ и $f\in C$. Тогава за $a\in\mathbb{R}$ и $x>a$ интегралът

$$ {}_aR_x^\alpha f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau \qquad (11.1)$$

се нарича ***дробен интеграл на Риман-Лиувил от ред α от функцията*** f.

Бележка 11.2. Като начало, да отбележим, че ако $a=0$, $\alpha>0$ и $f\in C$, то дробният интеграл (11.1) всъщност представлява конволюция от вида

$$ {}_aR_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(x). \qquad (11.1^*) $$

Последната формула се оказва полезна при намиране на Лапласовия образ от интеграл на Риман-Лиувил.

За илюстрация на нововъведения интеграл да разгледаме няколко примера.

Пример 11.1. Ако $a = 0$ и $\alpha > 0$, да се пресметне

а) ${}_0R_x^{\alpha}\left[x^p\right]$ за $p > -1$ и $x > 0$.

б) ${}_0R_x^{\alpha}\left[e^x\right]$, за $x > 0$

Решение:

а) Съгласно (11.1), след прилагане на субституцията $\tau = \lambda x$ намираме

$$ {}_0R_x^{\alpha}\left[x^p\right] = \frac{x^{\alpha+p}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \lambda^p (1-\lambda)^{\alpha-1} d\lambda. $$

Като вземем предвид също така (2.6) и (2.7) намираме, че

$$ {}_0R_x^{\alpha}\left[x^p\right] = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\alpha+1)} x^{\alpha+p} \quad . \qquad (11.2) $$

В частност, при $p = 0$, от (11.2) следва, че дробният интеграл на Риман-Лиувил от ред $\alpha > 0$ от произволна константа K има вида

$$ {}_0R_x^{\alpha}\left[K\right] = \frac{K\, x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \qquad (11.3) $$

б) Както е добре известно, експоненциялната функция се представя със сходящия степенен ред (даже в цялата комплексна равнина, виж (3.4))

$$ e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} \; . $$

Сега, интегрирайки почленно последното равенство, което е възможно поради равномерната сходимост на реда в интервала на интегриране, и отчитайки (11.2) и (11.3), а именно

$$ {}_0R_x^{\alpha}\left[x^k\right]=\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}x^{\alpha+k}, \qquad {}_0R_x^{\alpha}\left[1\right]=\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}, $$

получаваме:

$$ {}_0R_x^{\alpha}\left[e^x\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{\alpha+k}}{\Gamma(k+\alpha+1)}=x^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(k+\alpha+1)}=x^{\alpha}\,E_{1,\alpha+1}(x), $$

където $E_{1,\alpha+1}(x)$ е функцията на Митаг-Лефлер, дефинирана с (3.2), т.е.

$$ {}_0R_x^{\alpha}\left[e^x\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{\alpha+k}}{\Gamma(k+\alpha+1)}=x^{\alpha}\,E_{1,\alpha+1}(x). \tag{11.4} $$

Предполагайки, че $a=0$, ще посочим някои свойства на дробния интеграл на Риман-Лиувил, както следва.

Основни свойства на дробния интеграл на Риман-Лиувил:

- *Линейност*:

$$ {}_0R_x^{\alpha}[\lambda f(x)+\mu g(x)]=\lambda\left[{}_0R_x^{\alpha}f(x)\right]+\mu\left[{}_0R_x^{\alpha}g(x)\right],\quad \lambda,\mu\in\mathbb{C} $$

- *Непрекъснатост*: Ако $f\in C$ и f е непрекъснато диференцируема, то

$$ \lim_{\alpha\to 0+}\left[{}_0R_x^{\alpha}f(x)\right]=f(x) \text{ за } x\geq 0 $$

- *Асоциативност*: Ако $f\in C$, то при $\alpha>0$ и $\beta>0$,

$$ {}_0R_x^{\beta}\left[{}_0R_x^{\alpha}f(x)\right]={}_0R_x^{\alpha+\beta}f(x) $$

- *Трансформация на Лаплас*: Ако $f\in C$ и $\alpha>0$, то

$$ L[{}_0R_x^{\alpha}f(x);p]=p^{-\alpha}F(p), \tag{11.5} $$

където $F(p)=L[f(x);p]$

Само за пълнота ще дадем дефиниция и на понятието дробна производна.

Дефиниция 1.2. Ако $f \in C, \alpha > 0$ и $m \in \mathbb{N}$ е такова, че $m-1 \le \alpha < m$, то ***дробната производна на Риман-Лиувил от ред α от функцията*** f се дефинира с равенството:

$$ {}_aD_x^\alpha f(x) = D_x^m \left[{}_aR_x^{m-\alpha} f(x) \right] = \frac{d^m}{dx^m} \left[{}_aR_x^{m-\alpha} f(x) \right]. \qquad (11.6)$$

Ако $\alpha = m$, то ${}_aD_x^\alpha f(x) = D_x^m f(x)$.

Пример 11.2. Ако $a = 0$, $m \in N$ и $\alpha > 0$ е такова, че $m-1 \le \alpha < m$, да се пресметне ${}_0D_x^\alpha x^p$ за $p > -1$, $x > 0$.

Решение:

Съгласно (11.2) и (11.6) имаме,

$$ {}_0D_x^\alpha x^p = D_x^m [{}_0R_x^{m-\alpha} x^p] = $$

$$ = D_x^m \left[\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+m-\alpha+1)} x^{m-\alpha+p} \right] = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} x^{-\alpha+p}, $$

т.е.

$$ {}_0D_x^\alpha \left[x^p \right] = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} x^{p-\alpha}. \qquad (11.7)$$

В частност, ако $p = 0$, от (11.7) следва, че дробната производна от ред α на Риман-Лиувил от произволна константа K има вида

$$ {}_0D_x^\alpha K = \frac{Kx^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \qquad (11.8)$$

Отново за $a = 0$, да приведем някои от основните свойства на дробната производна на Риман-Лиувил, както следва.

- *Линейност*:

$$ {}_0D_x^\alpha [\lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda\, {}_0D_x^\alpha f(x) + \mu\, {}_0D_x^\alpha g(x), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}. $$

- *Композиция на оператори на Риман-Лиувил*:

(а) Ако $\alpha \ge 0$ и $f(x)$ е такава, че при $\gamma < 1$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\gamma f(x) \ne 0$, то

$$ {}_0D_x^\alpha[{}_0R_x^\alpha f(x)] = f(x). $$

(б) Ако $\alpha \geq 0$, $m > 0$ е цяло число, такова, че $m-1 \leq \alpha < m$ а функцията $f(x)$ удовлетворява условието $\lim_{x\to 0} x^\gamma f(x) \neq 0$, при $\gamma < 1$, то

$$ {}_0R_x^\alpha[{}_0D_x^\alpha f(x)] = f(x) - \sum_{k=1}^{m} [{}_0D_x^{\alpha-k} f(x)]_{x=0} \frac{x^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}. $$

- *Трансформация на Лаплас*: Ако $\alpha \geq 0$, $m > 0$ е цяло число, за което $m-1 \leq \alpha < m$, то

$$ L[{}_0D_x^\alpha f(x); p] = p^\alpha F(p) - \sum_{k=0}^{m-1} p^k [{}_0D_x^{\alpha-k-1} f(x)]_{x=0}, $$

където $F(p) = L[f(x); p]$.

През 1823 г. Нилс Хенрик Абел (1802-1829) за първи път прилага оператор за диференциране от произволен ред при решаването на конкретен физичен проблем. Този проблем се отнася до определяне на формата на крива, лежаща във вертикална равнина и минаваща през началото на координатната система, по която материална точка с дадена маса се спуска за определено време (при отсъствие на триене), независимо от избора на началната точка на спускането. Занимавайки се с проблема (за тавтохроната или изохроната), Абел успява да реши частен случай на уравнението, известно днес като интегрално уравнение на Абел.

И така, в заключение ще се занимаем с намиране решението на интегралното уравнение на Абел от първи род, а именно:

$$ \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} x(\tau) d\tau = f(t), \quad 0 < \alpha < 1, \tag{11.8} $$

където функцията $f(t)\eta(t)$ е даден лапласов оригинал.

Решение.

Като вземем предвид (11.1) става ясно, че уравнението може да се запише чрез дробен интеграл на Риман-Лиувил по следния начин:

$$\Gamma(\alpha)\ {}_0R_t^{\alpha}\left[x(t)\right]=f(t). \qquad (11.8^*)$$

Съгласно (11.5), прилагането на трансформацията на Лаплас към даденото уравнение (или към (11.8*)) води до

$$\Gamma(\alpha)\,p^{-\alpha}L[x(t),p]=L[f(t);p]\ ,$$

което означава, че

$$L[x(t),p]=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\,p^{\alpha}\,L[f(t);p]=\frac{p}{\Gamma(\alpha)}\left\{\frac{1}{p^{1-\alpha}}L[f(t);p]\right\}.$$

Като се вземе предвид, че

$$L[t^{-\alpha};p]=\frac{\Gamma(1-\alpha)}{p^{1-\alpha}}\ ,$$

то съгласно теоремата на Борел за конволюцията за трансформацията на Лаплас и правилото за диференциране на функция оригинал, чрез обратната трансформация на Лаплас, намираме решението на даденото уравнение (11.8) във вида

$$x(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\ \frac{d}{dt}\int_0^t(t-\tau)^{-\alpha}\,f(\tau)\,d\tau. \qquad (11.9)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамовиц, М. и И. Стиган. *Справочник по специальным функциям;* Наука, Москва, 1979. (Abramovitz, I. Stegun, *Handbook of mathematical functions,* 1964.)
2. Ватсон, Г., *Теория Бесселевых функций,* т.1, "Иностранная литература". Москва, 1949.
3. Гърневска, Л.. *Операционно смятане*. Авангард Прима. София, 2009
4. Джрбашян, М.М., *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*. Издательство „Наука", Москва, 1966.
5. Erdelyi, A. et al. (Ed-s), *Higher Transcendental Functions*, Vols. 1 - 3, McGraw-Hill, New York-Toronto-London 1953-1955.
6. Kilbas, A., H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Амстердам, 2006.
7. Kiryakova, V., Multiple (multiindex) Mittag-Leffler functions and relations to generalized fractional calculus, *Computational and Applied Mathematics*, **118**, 2000, 241- 259.
8. Kiryakova, V., The multi-index Mittag-Leffler functions as important class of special functions of fractional calculus. *Computers and Mathematics with Appl.*, **59**, 2010, No 5, 1885-1895, doi:10.1016/j.camwa.2009.08.025
9. Kiryakova, V., Multiindex Mittag-Leffler functions, related Gelfond-Leontiev operators and Laplace type integral transforms, *Fract. Calc. Appl. Anal*. **2**, 1999, No 4, 445-462.
10. Кирякова, В., Класическите специални функции и специалните функции на дробното смятане като G - и H -функции. *Препринт No 5/ 2011*, ИМИ-БАН, София.
11. Левин, Б., *Распределение корней целых функций,* Технико-теоретической литературы, Москва, 1956.
12. Luchko, Yu., Operational method in fractional calculus, *Fract. Calc. Appl. Anal.* **2**, 1999, No 4, 463-488.

13. Люк, Ю., *Специальные математические функции и их аппроксимации,* Мир, Москва, 1980.
14. Маринов, М. *Интегрални трансформации*, ВМЕИ, София, 1989.
15. Маркушевич, А., *Теория аналитических функций,* 1, 2 (In Russian), Nauka, Moscow, 1967.
16. Paneva-Konovska, J., Multi-index (3m-parametric) Mittag-Leffler functions and fractional calculus. *Compt. rend. Acad. bulg. Sci.* Tome **64**, No 8, 2011, 1089-1098.
17. Paneva-Konovska, J., Three-multi-index Mittag-Leffler functions, series and convergence theorems. *Proc. of Fifth Symposium on Fractional Differentiation and Its Applications, May 14-17, 2012*, Hohai University, China: Paper No: #284, 1-7 (Editors: Wen Chen, HongGuang Sun and Dumitru Baleanu).
18. Paneva-Konovska, J., The convergence of series in multi-index Mittag-Leffler functions. *Integral Transforms and Special Functions*, **23**, No 3, 2012, 207-221, doi: 10.1080/10652469.2011.575567, URL: http://dx.doi.org/10.1080/10652469.2011.575567
19. Podlubny, I., *Fractional Differential Equations*, Acad. Press, San Diego - Boston, 1999.
20. Prabhakar, T.R., A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel. *Yokohama Math. J.*, **19**, 1971, 7-15.
21. Sneddon, I., *The use of Integral Transforms*. McGraw-Hill, USA, 1972.
22. Титчмарш, Е., *Теория функций*. Наука, Москва, 1980.
23. Фихтенгольц, Г., *Курс дифференциального и интегрального исчисления,* том 1 – 3, Издательство „Наука”, Москва, 1966.
24. Yakubovich, S., Yu. Luchko, *The Hypergeometric Approach to Integral Transforms and Convolutions*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht - Boston - London 1994.

ТРАНСФОРМАЦИЯ НА ЛАПЛАС
В ПРИМЕРИ И ЗАДАЧИ

Автор: Йорданка Добрева Панева-Коновска, доц. д-р

Рецензент: Виржиния Стойнева Кирякова, проф. дмн

Поръчка № 169/2012 г. Формат 16/60/84

ISBN: 978-954-438-992-5

Издателство и печат –Технически университет - София

гр. София, бул. „ Климент Охридски” 8, тел. 02 965 22 26